राजस्थान लोक सेवा आयोग,
अजमेर द्वारा आयोजित

AKSHANSH PUBLICATION

द्वितीय श्रेणी शिक्षक भर्ती परीक्षा

द्वितीय प्रश्न पत्र

गणित

भाग-2 (स्नातक स्तर)

भाग 1 व 3 अवश्य पढ़ें।

आसान, सटीक एवं
संपूर्ण अध्ययन
अब एक ही पुस्तक से!

विशेषताएं:

1. परीक्षा की दृष्टि से अतिमहत्वपूर्ण प्रश्नों का व्याख्या सहित हल
2. नवीनतम पाठ्यक्रम पर आधारित प्रश्नों का समावेश
3. विगत वर्षों के प्रश्नपत्रों के विश्लेषण पर आधारित प्रश्न
4. नवीनतम पाठ्यक्रम पर आधारित

डॉ.नरेश मेनारिया सर | अनिल सर

अक्षांश पब्लिकेशन

M. 9079798005, 6376491126

Plot No 1104, Shiksha Mandir, Sec 4, Circle, Main Road, Udaipur

व्याख्यात्मक हल
लक्ष्य क्लासेज़, उदयपुर
के यूट्यूब चैनल पर उपलब्ध

राजस्थान लोक सेवा आयोग द्वारा आयोजित

AKSHANSH PUBLICATION

द्वितीय श्रेणी शिक्षक भर्ती परीक्षा

द्वितीय प्रश्न पत्र

गणित

भाग-2

"अक्षांश प्रकाशन की समस्त पुस्तकें लक्ष्य क्लासेज़, उदयपुर के अनुभवी शिक्षकों के मार्गदर्शन एवं अक्षांश प्रकाशन की समर्पित टीम के सहयोग से तैयार की गई हैं।"

संपादक
अनिल सर, डॉ. नरेश मेनारिया सर

सह संपादक
गंगासिंह भाटी, अनोपचंद मंडा

प्रकाशन
अक्षांश प्रकाशन, उदयपुर (राज.)

प्रकाशन

अक्षांश प्रकाशन

Plot No 1104, Shiksha Mandir, Sec 4, Circle,
Main Road, Udaipur

लक्ष्य क्लासेज़, उदयपुर से जुड़ने के लिए QR CODE स्कैन करे

TELEGRAM INSTAGRAM YOUTUBE FACEBOOK WHATSAPP

बुक कोड - AP0102

lakshyaclassesudr@gmail.com

मुख्य वितरक - लक्ष्य क्लासेज़, उदयपुर
M. 9079798005, 6376491126

विषय वस्तु

♦♦♦♦

द्विचर संक्रिया (Binary Operation)

- गणित में द्विचर संक्रिया (Binary Operation) एक ऐसी क्रिया होती है, जो किसी सेट S के दो अवयव को लेकर उसी सेट के किसी एक अवयव को उत्पन्न करती है।
- इसे सामान्यतः * (अर्थात ऑपरेशन) द्वारा दर्शाया जाता है।
- द्विचर संक्रिया किसी समुच्चय A पर एक ऐसा गणितीय नियम है, जो A के किसी भी दो अवयवों पर लागू होने पर पुनः A का ही एक अद्वितीय अवयव देता है।
- इसे $x*y \in A \; \forall \; x, y \in A$ के रूप में व्यक्त किया जाता है।
- ऐसी स्थिति में, समुच्चय A को उस द्विचर संक्रिया (*) के लिए "संवृत्त" (Closure) कहा जाता है।

जैसे: -

(i) किसी समुच्चय S के घात समुच्चय P(S) में परिभाषित संक्रिया

(a) दो समुच्चयों का संघ (Union) (∪) द्विचर संक्रिया है।

$A \cup B \in P(S) \; \forall A, B \in P(S)$

(b) दो समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (∩) द्विचर संक्रिया है।

$A \cap B \in P(S) \; \forall A, B \in P(S)$

(ii) यदि S, समष्टि के सभी सदिशों (वेक्टरों) का समुच्चय है, तो दो सदिशों का

(a) सदिश योग द्विचर संक्रिया है क्योंकि

$\vec{a} + \vec{b} \in S \forall \vec{a}, \vec{b} \in S$

(b) सदिश व्यवकलन द्विचर सक्रिया है क्योंकि

$\vec{a} - \vec{b} \in S \forall \vec{a}, \vec{b} \in S$

(c) सदिश गुणन द्विचर संक्रिया है क्योंकि

$\vec{a} \times \vec{b} \in S \forall \vec{a}, \vec{b} \in S$

(d) अदिश गुणन द्विचर संक्रिया नहीं है क्योंकि

$\vec{a} \in S, \vec{b} \in S$ किन्तु $\vec{a} \cdot \vec{b} \notin S$

(iii) प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में परिभाषित

(a) योग संक्रिया + द्विचर संक्रिया है क्योंकि

$a + b \in \mathbf{N} \quad \forall a \in \mathbf{N},\; b \in \mathbf{N}$

(b) गुणन संक्रिया × द्विचर संक्रिया है क्योंकि

$a \times b \in \mathbf{N} \quad \forall a \in N,\; b \in \mathbf{N}$

(c) व्यवकलन संक्रिया -, द्विचर संक्रिया नहीं है क्योंकि

$a \in N, b \in N$ हो तो $a - b \in N$ सदैव सत्य हो आवश्यक नही

(d) विभाजन संक्रिया ÷, द्विचर संक्रिया नही है। क्योंकि

$a \in N, b \in N$ हो तो $a \div b \in N$ सदैव सत्य हो आवश्यक नही

(iv) पुर्णांकों के समुच्चय Z में परिभाषित

(a) योग संक्रिया + द्विचर संक्रिया है क्योंकि

$a + b \in \mathbf{Z} \quad \forall a,\; b \in \mathbf{Z}$

(b) गुणन संक्रिया ·, द्विचर संक्रिया है क्योंकि

$a \cdot b \in \mathbf{Z} \quad \forall a,\; b \in \mathbf{Z}$

(c) व्यवकलन संक्रिया - द्विचर सक्रिया है क्योंकि

$a - b \in \mathbf{Z} \quad \forall a, b \in \mathbf{Z}$

(d) विभाजन संक्रिया ÷, द्विचर संक्रिया नही है। क्योंकि

$a \in Z, b \in Z$ हो तो सदैवव आवश्यक नही कि $a \div b \in Z$

Note :-

(i) योग संक्रिया N, Z, Q, R, और C प्रत्येक समुच्चय में एक द्विचर संक्रिया है।

(ii) व्यवकलन संक्रिया Z, Q, R, और C पर द्विचर संक्रिया है, परंतु N पर यह द्विचर नहीं है।

(iii) गुणन संक्रिया N, Z, Q, R, और C प्रत्येक समुच्चय में द्विचर संक्रिया है।

(iv) विभाजन संक्रिया N, Z, Q, R, और C में द्विचर संक्रिया नहीं है, लेकिन Q_0, R_0, और C_0 पर यह द्विचर संक्रिया है।

द्विचर संक्रिया के गुणधर्म–

(i) क्रमविनिमेयता (Commutativity)

- किसी समुच्चय S में परिभाषित द्विचर संक्रिया एक क्रम विनिमेय संक्रिया कहलाती है यदि

$a * b = b * a \quad \forall a, b \in \mathbf{S}$

जैसे: -

- वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में परिभाषित योग और गुणन संक्रिया क्रमविनिमेय (commutative) हैं। हालांकि, व्यवकलन (घटाने) की संक्रिया क्रमविनिमेय नहीं होती।

(ii) साहचर्यता (Associativity)

- अरिक्त समुच्चय S में द्विचर संक्रिया $*$ परिभाषित है। यदि $a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in S$ तो द्विचर सक्रिया *, साहचर्चता नियम (Associative Law) का पालन करती है।

जैसे :-

- वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में परिभाषित संक्रिया, जैसे योग (+) और गुणन (×), साहचर्यता के नियम (associative law) का पालन करती हैं। हालांकि, व्यवकलन (–) संक्रिया साहचर्यता का पालन नहीं करती।

$a+(b+c)=(a+b)+c \quad \forall a,b,c \in \mathbf{Z}$

$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c \quad \forall a,b,c \in \mathbf{Z}$

किन्तु $a-(b-c) \neq (a-b)-c$

प्रतिलोम अवयव (Inverse Element)

– **वाम तथा दक्षिण प्रतिलोम अवयव (Left & Right Inverse of an Element)**

– अरिक्त समुच्चय S में परिभाषित द्विचर संक्रिया * का तत्समक अवयव e है। यदि $a \in S$ के लिए $b_1 \in S$ इस प्रकार विद्यमान हो ताकि $\boldsymbol{b_1 * a = e}$ हो तो b_1 को a का वाम प्रतिलोम अवयव (left inverse) कहते है।

– इसी प्रकार $a \in S$ के लिए $b_2 \in S$ इस प्रकार हो ताकि $\boldsymbol{a * b_2 = e}$ हो तो b_2 को a का दक्षिण प्रतिलोम अवयव (Right Inverse) कहते है।

जैसे :- अरिक्त समुच्चय R_0 में द्विचर सक्रिया $a*b=|a|b$ के लिए प्रत्येक अशून्य $a \in R_0$ का दक्षिण प्रतिलोम $b=\frac{1}{|a|}$ होगा जबकि वाम प्रतिलोम विद्यमान नही है।

Note: -

(i) यदि अरिक्त समुच्चय S का अवयव a का वाम तथा दक्षिण प्रतिलोम दोनों b हो तो b को a का प्रतिलोम अवयव कहते है।

$\boldsymbol{a^*b = b^*a = e}$

तथा इसे a^{-1} से प्रदर्शित करते है।

पुनः यदि $a \in S$ का प्रतिलोम S में विद्यमान है तो a को व्युत्क्रमणीय अवयव (Inversiable Element) कहते है।

अतः $a \in S$ व्युत्क्रमणीय हो तो $\Rightarrow a^{-1} \in S$

(ii) अरिक्त समुच्चय S में द्विचर सक्रिया $*$ का तत्समक अवयव e हो तो $\boldsymbol{e^*e = e}$

अर्थात् तत्समक अवयव व्युत्क्रमणीय होता है तथा तत्समक अवयव का प्रतिलोम भी तत्समक अवयव ही होता है।

जैसे: -

(i) वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में योग संक्रिया के लिए प्रत्येक $a \in \mathbf{R}$ का प्रतिलोम $-a \in \mathbf{R}$ होता है।

$a \in R \Rightarrow -a \in R,$

$a+(-a)=(-a)+a=0$ (योज्य तत्समक अवयव)

$-a \in R,\ a \in R$ का योज्य प्रतिलोम कहलाता है।

(ii) अशुन्य परिमेय संख्याओ के समुच्चय Q_0 में गुणन संक्रिया के लिए प्रत्येक $a \in Q_0$ का प्रतिलोम $\frac{1}{a} \in Q_0$ होता है।

$a \in Q_0 \Rightarrow \frac{1}{a} \in Q_0,$

$a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a = 1$ (गुणन तत्समक अवयव)

$\frac{1}{a} \in Q_0, a \in Q_0$ का गुणन प्रतिलोम कहलाता है।

(iii) एक साहचर्य संक्रिया के लिए व्युत्क्रमणीय अवयव का प्रतिलोम अद्वितीय होता है।

– अरिक्त समुच्चय S में एक द्विचर सक्रिया $*$ का तत्समक अवयव e है, तथा माना $a \in S$ एक व्युत्क्रमणीय अवयव इस प्रकार है कि S में a के संभव प्रतिलोम b तथा c है।

$b*a=e$ तथा $a*c=e$

पुनः $b*(a*c)=b*e=b$

तथा $(b*a)*c=e*c=c$

साहचर्य गुणधर्म से $b*(a*c)=(b*a)*c$

$\boldsymbol{b=c}$

अर्थात् प्रत्येक व्युत्क्रमणीय अवयव का प्रतिलोम अद्वितीय होता है। यदि संक्रिया सहचारी है अथवा प्रतिलोम के अद्वितीय होने के लिए संक्रिया साहचारी होना आवश्यक है।

उदाहरण :

1. निम्नलिखित द्विचर संक्रियाओं के लिए तत्समक अवयव तथा प्रतिलोम अवयव ज्ञात करो।

(i) $\boldsymbol{< G = \{3^n \mid n \in Z\}, x >}$

(ii) $\boldsymbol{< G = R - \{-1\}, 0 >}$

जहाँ $\boldsymbol{a \circ b = a + b + ab \quad \forall a, b \in G}$

(iii) $\boldsymbol{< G = Q - \{1\}, 0 >}$

जहाँ $\boldsymbol{aob = a + b - ab \quad \forall a, b \in G}$

व्याख्या: -

(i) $\because$ गुणा संक्रिया के लिए तत्समक अवयव $=1$

3^n का गुणन प्रतिलोम $=3^{-n} \quad \forall n \in Z$

(ii) $\because a \circ b = a+b+ab$

o संक्रिया का तत्समक अवयव e हो तो

$aoe = a$

$a+e+ae=a$

$e(1+a)=0$

तत्समक अवयव $e=0$

यदि a का प्रतिलोम b हो तो

$aob = e \Rightarrow a+b+ab=0$

$\Rightarrow b(1+a)=-a$

$\Rightarrow b=\frac{-a}{1+a}, \quad a \neq -1$

a का प्रतिलोम $=\frac{-a}{1+a} \quad \forall a \neq -1$

(iii) $\because a \circ b = a + b - ab$

o संक्रिया का तत्समक अवयव e हो तो

$a \circ \mathrm{e} = a \Rightarrow a + \mathrm{e} - a\mathrm{e} = a$

$\mathrm{e}(1 - a) = 0 \Rightarrow \mathrm{e} = 0$

तत्समक अवयव $= 0$

यदि a का प्रतिलोम b हो तो

$a \circ b = \mathrm{e} = 0$

$\Rightarrow a + b - ab = 0 \Rightarrow b(1 - a) = -a$

$b = \dfrac{-a}{1 - a} = \dfrac{a}{a - 1}$

a का प्रतिलोम $\frac{a}{a-1}$, $\quad a \neq 1$

तत्समक अवयव (Identity Element)

द्विचर संक्रिया का तत्समक अवयव

– अरिक्त समुच्चय S में परिभाषित द्विचर सक्रिया *के लिए अवयव e इस प्रकार विद्यमान हो ताकि $e^*a = a^*e = a$ तो e, S में द्विचर संक्रिया * का तत्समक अवयव कहलाता है।

जैसे:-

(i) वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में योग संक्रिया का तत्समक अवयव शून्य (0) है।

$a \in \mathrm{R} \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a \qquad \forall a \in \mathrm{R}$

Note: - प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में योग संक्रिया का तत्समक अवयव 0 (शून्य) विद्यमान नहीं है।

(ii) वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में गुणन संक्रिया का तत्समक अवयव 1 (इकाई) है।

$1 \in \mathrm{R} \Rightarrow 1 \cdot a = a \cdot 1 = a \qquad \forall a \in \mathrm{R}$

वाम तथा दक्षिण तत्समक अवयव

– अरिक्त समुच्चय S में द्विचर संक्रिया $*$ के लिए एक अवयव $\mathrm{e}_1 \in$ S इस प्रकार हो ताकि $e_1^*a = a \quad \forall a$ S तो e_1 को S के अन्तर्गत * संक्रिया का वाम तत्समक अवयव कहते है।

– इसी प्रकार S में एक अवयव $e_2 \in$ S इस प्रकार हो ताकि

$a^*e_2 = a \qquad \forall a \in \mathrm{S}$

तो e_2 को S के अन्तर्गत * संक्रिया का दक्षिण तत्समक अवयव कहते है।

Note :-

(i) यदि किसी समुच्चय S में द्विचर संक्रिया * के लिए वाम तत्समक अवयव विद्यमान है, तो यह आवश्यक नहीं कि दक्षिण तत्समक अवयव भी विद्यमान हो। इसी प्रकार, यदि दक्षिण तत्समक अवयव विद्यमान है, तो वाम तत्समक अवयव का विद्यमान होना अनिवार्य नहीं है।

(ii) यदि किसी द्विचर संक्रिया का केवल वाम अथवा केवल दक्षिण तत्समक अवयव विद्यमान हो तो तत्समक अवयव की संख्या एक से अधिक हो सकती है।

(iii) यदि अरिक्त समुच्चय S में परिभाषित द्विचर संक्रिया * का तत्समक अवयव e विद्यमान हो तो वह अद्वितीय होता है।

माड्यूलो पद्धति (Module System)

– **मॉड्यूलो पद्धति** एक गणितीय प्रणाली है, जो संख्याओं को किसी निश्चित संख्या के साथ भाग देकर शेषफल (remainder) निकालने की प्रक्रिया पर आधारित होती है। इसे **मॉड्यूलर अंकगणित** भी कहा जाता है।

– यदि a तथा b ऐसे पूर्णाँकि हो ताकि $(a - b)$ एक घनात्मक पूर्णाँकि m से विभाज्य हो तो इसे $a \equiv b(\mathrm{mod} m)$ से प्रदर्शित करते है तथा इसे " a सर्वांगसम b माड्यूलों m" (a is congruent to b module m) पढ़ते है।"

$\boldsymbol{a \equiv b(\mathrm{mod} m) \Leftrightarrow \mathrm{m} \mid (a - b)}$

माड्यूलो पद्धति में योग -

– यदि a, b दो पूर्णांक हो तो घनात्मक पूर्णांक m के लिए दो पूर्णांक q तथा r इस प्रकार होगे ताकि

$a + b = mq + r, \qquad 0 \leq r < m$

तो r, a और b के योग माड्यूलो m का समशेष (Reminder of addition modulo m) कहलाता है।

$a + b = r(\mathrm{mod\ m})$ या $a +_{,} b = r$

$a + b = \begin{cases} a + b & \text{यदि } a + b < m \\ r & \text{यदि } a + b \geq m \end{cases}$ जहाँ $r, a + b$ में m का भाग देने पर प्राप्त शेषफल

सक्रिया सारणी से कुछ बातें:

(i) अगर सक्रिया सारणी मुख्य विकर्ण के चारों ओर सममित है, तो संक्रिया क्रमविनिमेय होगी।

(ii) कोई अवयव तब तत्समक अवयव कहलाएगा, जब उसकी पंक्ति या स्तम्भ पहली पंक्ति या स्तम्भ के हिसाब से सममित हो।

(iii) कोई अवयव व्युत्क्रमणीय होगा, अगर उसकी पंक्ति या स्तम्भ में तत्समक अवयव मौजूद हो।

जैसे: - उपरोक्त सारणी मुख्य विकर्ण के सापेक्ष सममित है अतः $a +$, b क्रम विनिमेय है।

सारणी में 0 (शुन्य) के सापेक्ष प्राप्त पंक्ति (या स्तम्भ) प्रारम्भिक पंक्ति (या स्तम्भ) के सापेक्ष सममित है।

अतः 0 इस संक्रिया का तत्समक अवयव है। तथा

0 का प्रतिलोम अवयव 0

1 का प्रतिलोम अवयव 4

2 का प्रतिलोम अवयव 3

3 का प्रतिलोम अवयव 2

4 का प्रतिलोम अवयव 1

माड्यूलो पद्धति में गुणन संक्रिया -

- इसी प्रकार m एक धन पूर्णांक हो तो दो पूर्णांकों a तथा b के लिए यदि $a \cdot b = mq + r, \quad 0 \le r < m$ तो r को a तथा b का गुणन माड्यूलो m का समशेष [$\mathrm{R_e}$. minder of multiplication modulo m कहते है तथा इसे $a \cdot b = r(\mathrm{mod\ m})$ अथवा $a \times_{\mathrm{m}} b = r$ द्वारा प्रदर्शित

$$\mathrm{a} \times_{\mathrm{m}} \mathrm{b} = \begin{cases} \mathrm{a \cdot b} & \text{यदि } \mathrm{a \cdot b < m} \\ r & \text{यदि } \mathrm{a \cdot b \ge m} \text{ जहाँ } \mathrm{r, ab} \text{ में} \\ & \mathrm{m} \text{ का भाग देने पर प्राप्त शेषफल} \end{cases}$$

माड्यूलो अवशेष वर्ग -

- पूर्णांको के समुच्चय Z में परिभाषित सम्बन्ध $(a + \mathrm{m_m} b)$ समशेष योग माड्यूलो m समुच्चय Z को असंयुक्त तुल्यता वर्गों में विभाजित कर देता है। जिन्हे अवशेष वर्ग माड्यूलो m कहते है।
- **यदि $a \in \mathbf{Z}$ हो तो a का अवशेष वर्ग** $(\mathbf{modm})$ $[a] = \{\boldsymbol{n \in \mathbf{Z}: n - a, m}$ **से विभाज्य है।** $\}$

  पूनः विभाजन कलन विधी से पूर्णांक a के लिए $q, r \in \mathrm{Z}$ इस प्रकार होते है। ताकि $a = qm + r$ जहाँ $0 \le \mathrm{r} < \mathrm{m}$

  अत: $a \equiv r(\mathrm{mod\ m})$, जहाँ $r = 0,1,2, \ldots, (\mathrm{m} - 1)$

  समशेष (modm), पूर्णांको के समुच्चय Z को m समशेष वर्गो [0], [1], [2], …….. [m-1] में विभाजित करता है।
- समशेष वर्गो के समुच्चय को I_m में प्रदर्शित करते है।

  $\mathrm{I_m} = \{[0], [1], [2], \ldots\ldots\ldots\ldots.., [\mathrm{m} - 1]\}.$

  जैसे:- $m = 4$ लेने पर

  $\mathrm{I_4} = \{[0], [1], [2], [3]\}$
- यदि $[a], [b] \in \mathrm{I_m}$हो तो अवशेष वर्गों का योग $[a] + [b] = [a + b]$ तथा अवशेष वर्गो का गुणन $[a][b] = [ab]$

  जैसे:- $I_4 = \{[0], [1], [2], [3]$ हो तो

  $[2] + [4] = [2 + 4] = [6] = [2]$

  $[2] \cdot [4] = [2.4] = [8] = [0]$

मानलो n एक स्थिर धन पूर्णांक है और a, b, c स्वेच्छ पूर्णांक है, तो

(i) $a \equiv a(\mathrm{mod}\ n)$,

(ii) यदि $a \equiv b(\mathrm{mod}\ n)$ तब $b \equiv a(\mathrm{mod}\ n)$

(iii) यदि $a \equiv b(\mathrm{mod}\ n)$ और $b \equiv c(\mathrm{mod}\ n)$ तब $a \equiv c(\mathrm{mod}\ n)$

(iv) यदि $a \equiv b(\mathrm{mod}\ n)$ तब $ac \equiv bc(\mathrm{mod}\ n)$

(v) यदि $a \equiv b(\mathrm{mod}\ n)$ तब $a^k \equiv b^k(\mathrm{mod}\ n)$ प्रत्येक धन पूर्णांक k के लिये।

समूह सिद्धांत (Group theory)

बीजीय पद्धति / निकाय / सरचना-

- बीजीय पद्धति (Algebraic System) एक ऐसी गणितीय संरचना होती है, जिसमें एक या अधिक द्विचर संक्रियाएँ परिभाषित होती हैं। ये संक्रियाएँ समुच्चय के दो अवयवों पर कार्य करती हैं और उसी समुच्चय में एक नया अवयव उत्पन्न करती हैं।

बीजीय पद्धति की परिभाषा:

- यदि कोई समुच्चय G (जिसे अरिक्त समुच्चय कहा जाता है) पर कोई द्विचर संक्रिया * परिभाषित की जाती है, तो इसे (G,*) बीजीय पद्धति कहा जाता है। इसका मतलब यह है कि G में एक द्विचर संक्रिया * का पालन किया जा सकता है, और उस पर कुछ गुण भी लागू होते हैं।

  जैसे- $(\mathrm{N}, +), (\mathrm{Z}, -), (\mathrm{Q}, \times)$ आदि।

Note : - बीजीय पद्धति $(\mathrm{G}, *)$ को समुहाभ (Groupoid) अथवा द्विचर बीजावली (Binary algebra) अथवा कल्प ग्रुप भी कहते है। जबकि $\mathbf{G}$, * के लिए संवृत हो बीजीय पद्धति के अध्ययन को ही बीज गणित कहते है।

लूप (Loop)-

- किसी क्वैसी ग्रुप (G, *) को लुप कहते है यदि संक्रिया * के लिए तत्समक अवयव (e ∈ $\mathbf{G}$) इसमें उपस्थित हो

  $a * e = e * a = a \qquad \forall a \in \mathrm{G}$
- हर लूप एक क्वैसी-ग्रुप होता है, लेकिन हर क्वैसी-ग्रुप एक लूप नहीं होता क्योंकि उसमें तत्समक अवयव आवश्यक नहीं है।

लूप के गुण-

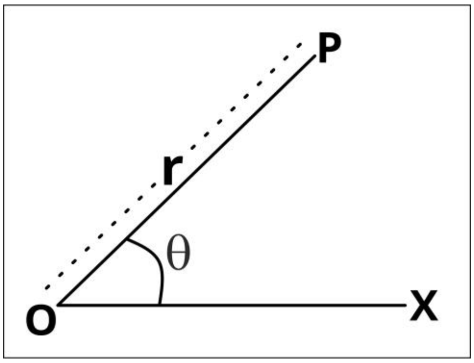
1. प्रत्येक अवयव का व्युत्क्रम (Inverse) मौजूद हो सकता है, लेकिन यह आवश्यक नहीं है।
2. यदि लूप साहचर्य (Associative) हो जाए, तो वह समूह बन जाता है।
3. हर लूप में बाएँ और दाएँ विभाजन गुणधर्म (Left & Right Division Property) होता है।
4. लूप ज्यादातर स्थितियों में साहचर्य नहीं होते हैं।

धुवीय निर्देशाँक पद्धति (System of Polar Co-ordinates)

ध्रुवीय निर्देशाँक पद्धति की परिभाषा-

– ध्रुवीय निर्देशाँक प्रणाली में एक निश्चित बिंदु O और एक निश्चित रेखा OX को लिया जाता है। इस निश्चित बिंदु O को ध्रुव (pole) और रेखा OX को प्रारंभिक रेखा कहा जाता है।

ध्रुवीय निर्देशाँक की व्याख्या-



– समतल में स्थित किसी बिंदु P के ध्रुवीय निर्देशांक को क्रमित युग्म (r, θ) के रूप में दर्शाया जाता है। यहाँ r, ध्रुव O को P से जोड़ने वाली सदिश रेखा को दर्शाता है, जिसे ध्रुवान्तर सदिश या त्रिज्य सदिश कहा जाता है।

ध्रुवान्तर कोण की व्याख्या-

– क्रमित युग्म का दूसरा अवयव θ ध्रुवान्तर कोण कहलाता है। यह ध्रुवान्तर सदिश OP द्वारा प्रारंभिक रेखा OX से बनाए गए कोण को दर्शाता है।

ध्रुवान्तर कोण का चिन्ह-

– यदि कोण OX के सापेक्ष वामावर्त दिशा में मापा जाता है, तो θ धनात्मक होता है, जबकि दक्षिणावर्त दिशा में मापने पर θ ऋणात्मक होता है।

एक ही बिंदु के ध्रुवीय निर्देशांक की विविधता-

– एक ही बिंदु के ध्रुवीय निर्देशांक को अनंत तरीकों से प्रदर्शित किया जा सकता है।

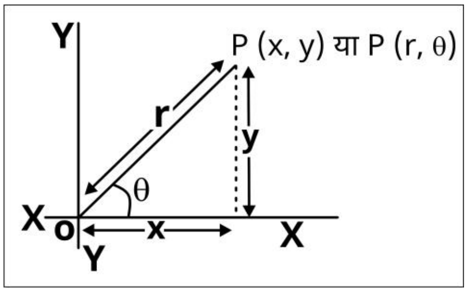
$(r,\theta),(r,2\pi+\theta),(r,4\pi+\theta),(r,\theta-2\pi),$

$(r,\theta-4\pi),(-r,\theta+\pi),(-r,\theta+3\pi),$

$(-r,\theta-\pi),(-r,\theta-3\pi)$.... आदि एक ही बिन्दु के ध्रुवीय निर्देशांक है।

कार्तिय निर्देशांक तथा धुवीय निर्देशांकों में सम्बन्ध -

– कार्तिय निर्देशांक (x, y) और ध्रुवीय निर्देशांक (r, θ) के बीच में निम्नलिखित सम्बन्ध होते हैं:



$x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$

– इन समीकरणों का उपयोग करके, हम कार्तिय निर्देशांकों को ध्रुवीय निर्देशांकों में और ध्रुवीय निर्देशांकों को कार्तिय निर्देशांकों में बदल सकते हैं।

– इसके अलावा, हमें यह भी याद रखना चाहिए कि:

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\theta = \tan^{-1}(y/x)$

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| \text{ यदि } x>0, y>0 & [\text{प्रथम चतुर्थाश}] \\ -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| \text{ यदि } x>0, y<0 & [\text{चतुर्थ चतुर्थाश}]\ ] \\ \pi-\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| \text{ यदि } x<0, y>0 & [\text{द्वितीय चतुर्थां}] \\ -\pi+\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| \text{ यदि } x<0, y<0 & [\text{तुतीय चतुर्थांश}] \end{cases}$$

– इन समीकरणों का उपयोग करके, हम ध्रुवीय निर्देशांकों को कार्तिय निर्देशांकों में बदल सकते हैं।

उदाहरण:

1. बिन्दु $P(-1,1)$ के ध्रुवीय निर्देशांक ज्ञात करो-

व्याख्या: -

$\because x=-1, y=1$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

बिन्दु P के ध्रुवीय निर्देशांक $\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$

2. बिन्दु के कार्तीय निर्देशाँक $(1,-1)$ हो तो इसके ध्रुवीय निर्देशाँक ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$\because x = r\cos\theta \Rightarrow r\cos\theta = 1$

$y = r\sin\theta \Rightarrow r\sin\theta = -1$

$r^2 = x^2+y^2$

$= (1)^2+(-1)^2$

$= 1+1 = 2 \Rightarrow r=\sqrt{2}$

$\because (1,-1)$ चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है अत:

$\tan\theta = -\tan\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \theta = 2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$

अत: ध्रुवीय निर्देशाँक $\left(\sqrt{2},\frac{7\pi}{4}\right)$

3. यदि बिन्दु P के ध्रुवीय निर्देशांक $\left(-5,\frac{\pi}{3}\right)$ हो तो बिन्दु P के कार्तीय निर्देशांक ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$r=-5,\theta=\frac{\pi}{3}$

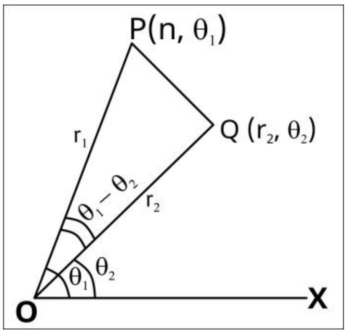
$x=r\cos\theta=-5\cos\frac{\pi}{3}=-5\cdot\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$

$y=r\sin\theta=-5\sin\frac{\pi}{3}=-5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

बिन्दु P के कार्तीय निर्देशांक $\left(-\frac{5}{2},-5\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

दो बिन्दुओं के मध्य दूरी-

– दो बिन्दु जिनके ध्रुवीय निर्देशांक $\mathrm{A}(r_1,\theta_1)$ तथा $\mathrm{B}(r_2,\theta_2)$ के मध्य दूरी $=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$



उदाहरण:

1. बिन्दु $\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$ तथा $\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$ के मध्य दूरी ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$\because$ बिन्दु (r_1,θ_1) तथा (r_2,θ_2) के मध्य दूरी

$=\sqrt{r_1^2+r_1^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$

$=\sqrt{(4)^2+(3)^2-2\times4\times3\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

$=\sqrt{16+9-24\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

$=\sqrt{25-24\times\frac{1}{2}}=\sqrt{13}$

2. बिन्दु $\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$ तथा $\left(-5,\frac{\pi}{2}\right)$ के मध्य दूरी ज्ञात करो-

व्याख्या: -

$r_1=4,\theta_1=\frac{\pi}{3}$ तथा $r_2=-5,\theta_2=\frac{\pi}{6}$

दूरी $d=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$

$=\sqrt{(4)^2+(-5)^2-2(4)(-5)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}$

$=\sqrt{16+25+100\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{41+50\sqrt{3}}$

स्पर्शी तथा धुवान्तर रेखा के मध्य कोण -

ध्रुवान्तर रेखा की परिभाषा-

– ध्रुव O से बिंदु P को मिलाने वाली सरल रेखा को बिंदु P की ध्रुवान्तर रेखा कहते हैं।

ध्रुवान्तर रेखा का झुकाव कोण-

– ध्रुवान्तर रेखा (r) का प्रारंभिक रेखा (X-अक्ष) के साथ झुकाव कोण θ होता है।

स्पर्श रेखा का झुकाव कोण-

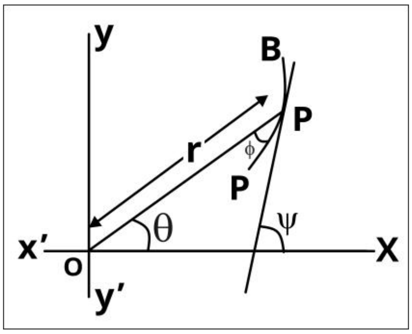
– बिंदु P पर वक्र की स्पर्श रेखा PT का X-अक्ष (प्रारंभिक रेखा) के साथ झुकाव कोण ψ होता है।

स्पर्श रेखा और ध्रुवान्तर रेखा के मध्य कोण-

– वक्र के बिंदु P पर स्पर्श रेखा और ध्रुवान्तर रेखा के मध्य कोण ϕ होता है।

– स्पर्श रेखा, ध्रुवान्तर रेखा, और प्रारंभिक रेखा के झुकाव कोणों के बीच संबंध

$\theta+\phi=\psi$



$\cos\phi=\frac{dr}{ds},\sin\phi=r\frac{d\theta}{ds}\Rightarrow\tan\phi=r\frac{d\theta}{dr}$

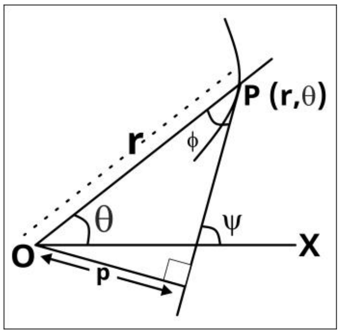
$\because\cos^2\phi+\sin^2\phi=1$

$\left(r\frac{d\theta}{ds}\right)^2+\left(\frac{dr}{ds}\right)^2=1$

पदिक समीकरण -

– पदिक समीकरण एक ऐसे समीकरण को कहा जाता है, जो किसी वक्र (curve) पर स्थित एक बिंदु पर खींची गई स्पर्शरेखा पर मूल बिंदु (Origin) से डाले गए लम्ब की लंबाई p को वक्र के ध्रुवीय त्रिज्या r से संबंधित करता है।

– वक्र के किसी बिन्दु $\mathrm{P}(\mathrm{r},\theta)$ पर खीची गई स्पर्श रेखा पर मूल बिन्दू से डाले गये लम्ब की लम्बाई p कहलाती है।



– p तथा r में सम्बन्ध वक्र का पदिक समीकरण कहलाता है।

$\boldsymbol{p=f(r)}$

(i) पदिक समीकरण का सामान्य रूप

स्पर्शरेखा का कोण ϕ उस बिंदु पर वक्र के स्पर्शकीय दिशा को दर्शाता है।

– पदिक दूरी p को r और ϕ के माध्यम से निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाता है:

$p = r\sin\phi \ldots\ldots(i)$

– यह पदिक समीकरण का मूल रूप है।

(ii) यदि वक्र का समीकरण ध्रुवीय रूप में हो

यदि वक्र का समीकरण ध्रुवीय रूप में हो

अर्थात् $r = f(\theta)$

$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \ldots\ldots(ii)$

(i), (ii) से θ का विलोपन करने पर वक्र का पदिक समीकरण प्राप्त होता है।

(iii) यदि $\frac{1}{r} = u$ हो तो

$\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$

(iv) यदि वक्र का समीकरण कार्तिय रूप में हो तो

$f(x, y) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (i)

$r^2 = x^2 + y^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (ii)$

मुल बिन्दु से स्पर्श रेखा पर लम्ब की लम्बाई

$p = \frac{\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \#(iii)$

(i), (ii), (iii) से x, y का विलोपन करने पर वक्र का पदिक समीकरण प्राप्त होता है।

उदाहरण:

1. वक्र $r = a(1 - \cos\theta)$ का पदिक समीकरण ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$\because r = a(1 - \cos\theta)$

$\frac{dr}{d\theta} = a(\sin\theta)$

$\because \tan\phi = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\frac{\theta}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\theta}{2}$

पदिक समीकरण $p = r\sin\phi \Rightarrow p = r\sin\frac{\theta}{2}$

$p = r\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = r\sqrt{\frac{r}{2a}}$

$r^3 = 2ap^2$

2. यदि $r = a(1 - \cos\theta)$ का पदिक समीकरण ज्ञात करो।

व्याख्या: - -

$r = a(1 - \cos\theta) = 2a\sin^2\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = 2a \cdot 2\sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= 2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$\because \tan\phi = r\frac{d\theta}{dr} = 2a\sin^2\frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$

$\tan\phi = \tan\frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow \phi = \frac{\theta}{2}$

पदिक समीकरण $p = r\sin\phi$

$P = r\sin\frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow p^2 = r^2 \cdot \sin^2\frac{\theta}{2}$

$p^2 = r^2 \cdot \frac{r}{2a} \Rightarrow r^3 = 2ap^2$

3. वक्र $x^2 - y^2 = a^2$ का पदिक समीकरण ज्ञात करो।

व्याख्या: -

वक्र की स्पर्श रेखा

$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) \quad \Rightarrow Y - y = \frac{x}{y}(X - x)$

$yY - y^2 = xX - x^2$

$xX - yY = a^2 \qquad [\because x^2 - y^2 = a^2]$

मुल बिन्दु से लम्ब $p = \frac{a^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{a^2}{r}$

$\Rightarrow pr = a^2$

चाप का अवकलज
(Derivative of an Arc)

चाप का अवकलज की परिभाषा-

– चाप की लम्बाई (s) का विभिन्न चर राशियों (जैसे-ध्रुवीय निर्देशांक r, θ या कार्तीय निर्देशांक x,y या प्राचल t) के सापेक्ष अवकलन गुणांक को चाप का अवकलज कहा जाता है।

वक्र का नैज समीकरण (Intrinsic Equation)-

– वक्र AB पर एक बिंदु P स्थित है। यदि बिंदु P पर वक्र की स्पर्श रेखा का x-अक्ष से झुकाव कोण ψ है और A से P तक चाप की लम्बाई 's' है, तो s और ψ के बीच का संबंध वक्र का नैज समीकरण कहलाता है।

वक्र का नैज समीकरण का रूप-

s = f(ψ)

– चाप की लम्बाई s का विभिन्न चर राशियों जैसे x, y, r, θ, t, के सापेक्ष अवकलन गुणांक $\frac{ds}{dx}, \frac{ds}{dy}, \frac{ds}{dr}, \frac{ds}{d\theta}, \frac{ds}{dt}$ चाप के अवकलज को प्रदर्शित करते हैं।

(i) कार्तिय समीकरण -

– वक्र $y = f(x)$ के लिए चाप s का कार्तीय निर्देशांक x के सापेक्ष अवकलज

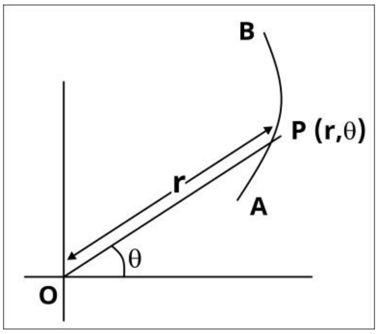
$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

– चाप s का कार्तीय निर्देशांक y के सापेक्ष अवकलज

$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$

(ii) ध्रुवीय समीकरण -

– वक्र के किसी बिन्दु P को मुल बिन्दु से मिलाने वाली रेखा की लम्बाई r, तथा रेखा OP का x - अक्ष से झुकाव θ द्वारा प्रदर्शित हो तो-



– (r,θ) बिन्दु P के ध्रुवीय निर्देशॉक कहलाते है। तथा r और θ में सम्बन्ध वक्र का ध्रुवीय समीकरण कहलाता है।

$r = f(\theta)$

– चाप s का ध्रुवीय निर्देशांक r के सापेक्ष अवकलज

$$\frac{ds}{dr} = \sqrt{\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + 1}$$

– चाप s का ध्रुवीय निर्देशांक θ के सापेक्ष अवकलज

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

(iii) प्राचलिक समीकरण-

– यदि वक्र का समीकरण प्राचल t के पदों में हो अर्थात्

$x = f_1(t), y = f_2(t)$

– चाप s का प्राचाल t के सापेक्ष अवकलज

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

उदाहरण:

1. वक्र $y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ के लिए $\frac{ds}{dx}$ का मान ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = c\left[\sinh\left(\frac{x}{c}\right)\cdot\frac{1}{c}\right] = \sinh\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$\because \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{c}} = \cosh\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{y}{c}$$

2. वक्र $y = a\log\sin\left(\frac{x}{a}\right)$ के लिए $\frac{ds}{dx}$ का मान होगा-

व्याख्या: -

$\because y = a\log\sin\left(\frac{x}{a}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = a\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{a}\right)}\cdot\cos\left(\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{1}{a} = \cot\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\because \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\cot^2\left(\frac{x}{a}\right)} = \operatorname{cosec}\left(\frac{x}{a}\right)$$

3. वक्र $r = \log\sin 3\theta$ के लिए $\frac{ds}{d\theta}$ का मान ज्ञात करो।

व्याख्या: -

वक्र $r = \log\sin 3\theta$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{\sin 3\theta}\times\cos 3\theta\times 3 = 3\cot 3\theta$$

$$\because \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{(\log\sin 3\theta)^2 + 9\cot^2 3\theta}$$

4. यदि $x = a\sec t$, $y = b\tan t$ हो तो $\frac{ds}{dt}$ का मान ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$x = a\sec t$ $\qquad$ $y = b\tan t$

$\frac{dx}{dt} = a\sec t\cdot\tan t$ $\qquad$ $\frac{dy}{dr} = b\sec^2 t$

$$\because \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(a\sec t\cdot\tan t)^2 + (b\sec^2 t)^2}$$

$$= \sec t\sqrt{(a^2\tan^2 t + b^2\sec^2 t)}$$

5. वक्र $y = \frac{1}{2}\log\tanh x$ के लिए $\frac{ds}{dy}$ का मान होगा-

व्याख्या: -

$\because y = \frac{1}{2}\log\tanh x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\tanh x}\times\operatorname{sech}^2 x = \frac{1}{2\sinh x\cosh x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sinh 2x}$$

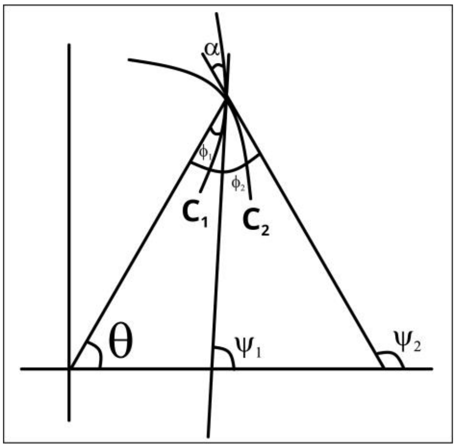
$$\frac{dx}{dy} = \sinh 2x$$

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1+\sinh^2 2x} = \cosh 2x$$

ध्रुवीय वक्रों का प्रतिच्छेदन कोण

– यदि दो वक्र किसी बिंदु P(r,θ) पर एक-दूसरे को काटते हैं, तो उनके स्पर्शकों (Tangents) के बीच का कोण ही प्रतिच्छेदन कोण (α) होता है।



– यदि दो ध्रुवीय वक्र C_1 तथा C_2 बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करते हो तो बिन्दु P पर दोनों वक्रों की स्पर्श रेखाओं के मध्य कोण दोनों वक्रों का प्रतिच्छेदन कोण कहलाता है।

प्रतिच्छेदन कोण $\alpha = |\phi_2 - \phi_1|$

उदाहरण:

1. वक्रों $\frac{2a}{r} = 1 + \cos\theta$ तथा $\frac{2a}{r} = 1 - \cos\theta$ का प्रतिच्छेन कोण ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$\because$ वक्र $\frac{2a}{r} = 1 + \cos\theta \ldots\ldots (i)$

$\frac{2a}{r} = 1 - \cos\theta \qquad (ii)$

(i) व (ii) $1 + \cos\theta = 1 - \cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

पुन: प्रथम वक्र के लिए

$\frac{2a}{r} = 1 + \cos\theta$

$\log 2a - \log r = \log(1 + \cos\theta)$

θ के सापेक्ष अवकलन

$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{1+\cos\theta} \times -\sin\theta$

$\cot\phi_1 = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$

$\tan\phi_1 = \cot\frac{\theta}{2}$

$\phi_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$

द्वितीय वक्र के लिए

$\frac{2a}{r} = 1 - \cos\theta$

$\log(2a) - \log r = \log(1 - \cos\theta)$

θ के सापेक्ष अवकलन

$0 - \frac{1}{rdr} = \frac{1}{1-\cos\theta} \times \sin\theta$

$\cot\phi_2 = -\tan\frac{\theta}{2} \Rightarrow \phi_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$

दोनों वक्रों का प्रतिच्छेदन कोण

$\alpha = |\phi_2 - \phi_1|$

$= \left|\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\right| = \theta$

$\alpha = \frac{\pi}{2} \ \left[\because \theta = \frac{\pi}{2}\right]$

2. वक्रों $r = a(1 - \cos\theta)$ तथा $r = 2a\cos\theta$ का प्रतिच्छेदन कोण ज्ञात करो?

व्याख्या: -

वक्र $r = a(1 - \cos\theta)\}^{a(1-\cos\theta) = 2a\cos\theta}$

तथा $r = 2a\cos\theta\}\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

प्रथम वक्र के लिए

$r = a(1 - \cos\theta)$

$\log r = \log a + \log(1 - \cos\theta)$

$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = 0 + \frac{1}{1-\cos\theta} \times \sin\theta$

$\cot\phi_1 = \cot\frac{\theta}{2} \Rightarrow \phi_1 = \frac{\theta}{2}$

द्वितीय वक्र के लिए

$r = 2a\cos\theta$

$\log r = \log 2a + \log\cos\theta$

$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = 0 + \frac{1}{\cos\theta} \times -\sin\theta$

$\cot\phi_2 = -\tan\theta$

$\Rightarrow \phi_2 = \frac{\pi}{2} + \theta$

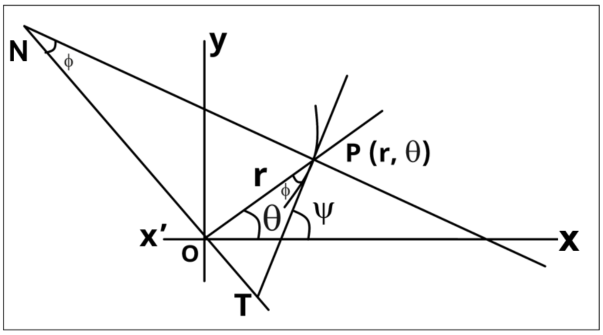
दोनों वक्रों का प्रतिच्छेदन कोण $\alpha = |\phi_2 - \phi_1|$

$\alpha = \left|\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) - \frac{\theta}{2}\right| = \frac{1}{2}(\pi + \theta)$

$\alpha = \frac{1}{2}\left[\pi + \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$

ध्रुवीय अध:स्पर्शी तथा अधोलम्ब –

– ध्रुवीय वक्र $r = f(\theta)$ के बिन्दु $P(r, \theta)$ पर PT तथा PN क्रमश: स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब है। ध्रुव O से ध्रुवान्तर रेखा OP के लम्बवत् रेखा TON खीचीं जो कि बिन्दु P की स्पर्श रेखा को T बिन्दु पर तथा अभिलम्ब को N बिन्दु पर मिलती है तो OT तथा ON क्रमश: ध्रुवीय अध:स्पर्शी तथा ध्रुवीय अधोलम्ब को प्रदर्शित करता है।



PT = बिन्दु P पर ध्रुवीय स्पर्श रेखा

$= r\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}$

PN = बिन्दु P पर ध्रुवीय अभिलम्ब

$= r\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$

OT = बिन्दु P पर ध्रुवीय अध: स्पर्शी रेखा

ON = बिन्दु P पर ध्रुवीय अधोलम्ब $= \frac{dr}{d\theta}$

$\triangle$ OTP में $\tan\phi = \frac{OT}{OP} = \frac{OT}{r}$

अत: $OT = r\tan\phi = r\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)$

उदाहरण

1. परवलय $\frac{2a}{r} = 1 - \cos\theta$ के अध:स्पर्शी की लम्बाई =?

व्याख्या: -

$$\frac{2a}{r} = 1 - \cos\theta$$
$$\frac{-2a}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = \sin\theta$$
$$\Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^2}{2a}\sin\theta$$
$$\text{अध:स्पर्शी} = r^2\frac{d\theta}{dr} = \left|r^2 \times \frac{2a}{r^2\sin\theta}\right| = 2a\text{cosec}\theta$$

2. वक्र $r = a(1+\cos\theta)$ की धुवीय स्पर्श रेखा की लम्बाई =?

व्याख्या: -

$$R = a(1+\cos\theta)$$
$$r_1 = \frac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta$$
$$\text{ध्रुवीय स्पर्श रेखा} = \frac{r}{r_1}\sqrt{(r^2 + r_1^2)}$$
$$= \frac{a(1+\cos\theta)}{a\sin\theta}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + (-a\sin\theta)^2}$$
$$= \frac{a\cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2})}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\sqrt{(1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2}$$
$$= a\cot\frac{\theta}{2}\cdot\sqrt{2(1+\cos\theta)}$$
$$= a\cot\frac{\theta}{2}\cdot 2\cos\frac{\theta}{2}$$
$$= 2a\cot\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}$$

3. वक्र $r = \frac{a}{\theta}$ की अधोलम्ब की लम्बाई क्या है?

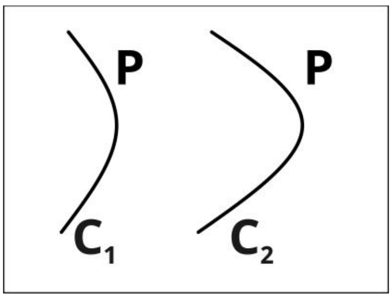
व्याख्या: -

$$\because r = \frac{a}{\theta}$$
$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{a}{\theta^2}$$
$$\text{अधोलम्ब} = \left|\frac{dr}{d\theta}\right| = \left|\frac{-a}{\theta^2}\right|$$
$$= \frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{\theta^2}\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{a}{\theta}\right)^2 = \frac{r^2}{a}$$

वक्रता (Curvature)

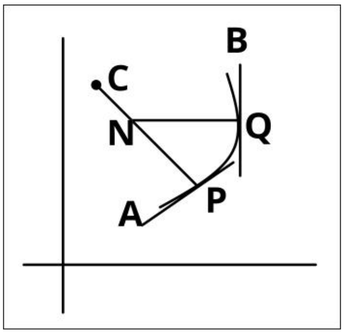
वक्रता की परिभाषा-

– किसी दिये गये वक्र के किसी बिन्दु पर घुमाव का मापक वक्र की उस बिन्दु पर वक्रता को प्रदर्शित करता है। जैसे दिये गये वक्र C_1 तथा C_2 में बिन्दु P पर C_2 की वक्रता C_1 की तुलना में अधिक है।



वक्रता का मापन-

– माना AB किसी वक्र का एक भाग है। वक्र के बिन्दु P पर अभिलम्ब PN तथा अन्य निकटतम बिन्दु Q पर अभिलम्ब QN है। बिन्दु P तथा Q पर खीचे गये अभिलम्ब परस्पर बिन्दु N पर मिलते है।



वक्रता केन्द्र-

– यदि बिन्दु Q वक्र पर बिन्दु P की ओर अग्रसर होता है, तो अभिलम्बों का प्रतिच्छेद बिन्दु N निश्चित बिन्दु C की ओर अग्रसर होता है। इस स्थिति में बिन्दु C को बिन्दु P पर वक्र का वक्रता केन्द्र कहते हैं।

वक्रता त्रिज्या-

– दुरी CP को बिन्दु P पर वक्र की वक्रता त्रिज्या कहते है।

वक्रता-

– वक्रता त्रिज्या CP का व्युत्क्रम बिन्दु P पर वक्र की वक्रता कहलाती है।

वक्रता वृत-

– वृत जिसका केन्द्र बिन्दु C तथा (वक्रता त्रिज्या) CP वृत की त्रिज्या लेकर खीचा गया हो, बिन्दु P पर वक्र का वक्रता वृत कहलाता है।

वक्रता जीवा

– बिन्दु P से वक्रता वृत में खीची गई जीवा बिन्दु P पर वक्रता जीवा कहलाती है।

स्पर्शी का झुकाव -

– स्पर्श रेखा का x - अक्ष से झुकाव ψ हो तो

$$\frac{dx}{ds} = \cos\psi, \frac{dy}{ds} = \sin\psi \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \tan\psi$$
$$\because \cos^2\psi + \sin^2\psi = 1$$
$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$$

– p तथा ψ में सम्बन्ध स्पर्शीय ध्रुवीय समीकरण कहलाता है। $p = f(\psi)$

वक्रता त्रिज्या (Radius of Curvature)

(i) नैज वक्रो के लिए वक्रता त्रिज्या-

– वक्र $s = f(\psi)$ वक्रता त्रिज्या $\rho = \frac{ds}{d\psi}$

(ii) कार्तिय सुत्र के लिए वक्रता त्रिज्या-

– वक्र का समीकरण $y = f(x)$

वक्रता त्रिज्या $\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$

$\because$ x तथा y अक्षों को अन्त: परिवर्तित करने पर वक्रता त्रिज्या अपरिर्वतित रहती है अत:

$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dxy^2}}$

(iii) पदिक समीकरणों के लिए वक्रता त्रिज्या -

– वक्र का पदिक समीकरण $p = f(r)$

वक्रता त्रिज्या $\rho = r\frac{dr}{dp}$

(iv) ध्रुवी बक्रो के लिए वक्रता त्रिज्या -

– वक्र का ध्रुवीय समीकरण $r = f(\theta)$

वक्रता त्रिज्या $\rho = \frac{[r^2+r_1^2]^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r_1^2-rr_2}$

जहाँ $r_1 = \frac{dr}{d\theta}$ तथा $r_2 = \frac{d^2r}{d\theta^2}$

(v) प्राचलिक वक्रो के लिए वक्रता त्रिज्या -

– वक्र के प्राचलिक समीकरण

$x = f(t)$ तथा $y \doteq \phi(t)$

हो तो वक्रता त्रिज्या $\rho = \frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-x''y'}$

जहाँ $x' = \frac{dx}{dt}, y' = \frac{dy}{dt}, x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$

(vi) यदि वक्र में x तथा y दो s के फलन हो तो वक्र की वक्रता त्रिज्या -

– यदि वक्र की वक्रता त्रिज्या ρ हो तो

$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}$

(vii) स्पर्शीय ध्रुवी समीकरण के लिए वक्रता त्रिज्या -

– वक्र का स्पर्शीय ध्रुवी समीकरण $p = f(\psi)$

वक्रता त्रिज्या $\rho = p + \frac{d^2p}{d\psi^2}$

उदाहरण:

1. वक्र $s = 4a\sin\frac{1}{3}\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)$ की वक्रता त्रिज्या ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$\because$ वक्रता त्रिज्या $\rho = \frac{ds}{d\psi} = 4a\cdot\cos\frac{1}{3}\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}$

$= \frac{4a}{3}\sqrt{1-\sin^2\frac{1}{3}\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right)}$

$= \frac{4a}{3}\sqrt{1-\left(\frac{s}{4a}\right)^2} = \frac{4a}{3}\sqrt{16a^2-s^2}$

2. वक्र $x^2y = a(x^2+y^2)$ के बिन्दु $(-2a, 2a)$ पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$\because x^2y = a(x^2+y^2)$

$2xy + x^2\frac{dy}{dx} = a\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right)$

$(x^2-2ay)\frac{dy}{dx} = 2ax - 2xy$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2ax-2xy}{x^2-2ay} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x^2-2ay}{2ax-2xy}$

$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(-2a,2a)} = 0$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{(2ax-2xy)\cdot\left(2x\frac{dx}{dy}-2a\right)-(x^2-2ay)\left(2a\frac{dx}{dy}-2x-2y\frac{dx}{dy}\right)}{(2ax-2xy)^2}$$

$$\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_{(-20,2a)} = \frac{(-4a^2+8a^2)(-2a)-0}{(-4a^2+8a^2)^2} = \frac{8a^3}{16a^4} = \frac{1}{2a}$$

वक्रता त्रिज्या $\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dy^2}} = \frac{(1+0)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2a}} = 2a$

वक्रता केन्द्र

– वक्र के किसी बिन्दु P पर वक्रता केन्द्र बिन्दु P से ρ दुरी पर स्थित बिन्दु होता है। बिन्दु P पर वक्रता वृत का केन्द्र वक्रता केन्द्र कहलाता है।

वक्रता केन्द्र $(\bar{x}, \bar{y})$ हो तो $\bar{x} = x - \rho\sin\psi$ तथा $\bar{y} = y + \rho\cos\psi$

अथवा

$\bar{x} = x - \frac{y_1(1+y_1^2)}{y_2}$ तथा $\bar{y} = y + \frac{1+y_1^2}{y_2}$

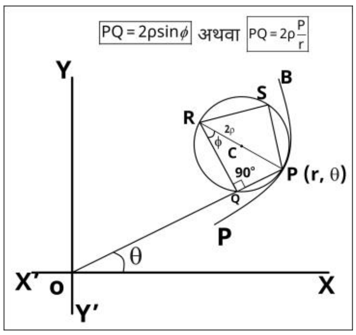
अत: वक्रता वृत का समीकरण

$(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 = \rho^2$

वक्रता जीवा

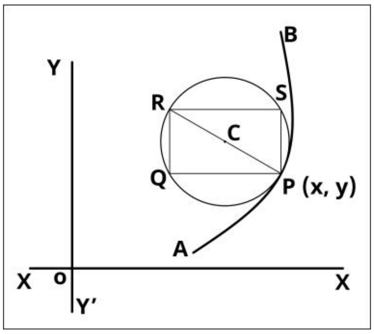
– वक्र के बिन्दु P के वक्रता वृत की बिन्दु P से गुजरने वाली जीवा, वक्रता जीवा कहलाती है।

(i) धुवान्तर रेखा की दिशा में वक्रता जीवा



(ii) ध्रुवान्तर रेखा के लम्बव्त दिशा में वक्रता जीवा

$PS = 2\rho\cos\phi$ या $PS = \frac{2\rho}{r}\sqrt{(r^2-p^2)}$



(iii) x-अक्ष के समान्तर वक्रता जीवा

$PQ = 2\rho\sin\psi$ या $PQ = \frac{2y_1(1+y_1^2)}{y_2}$

(iv) y - अक्ष के समान्तर वक्रता जीवा

$PS = 2\rho\cos\psi$ या $PS = \frac{2(1+y_1^2)}{y_2}$

वक्र $r^n = a^n\cos n\theta$ के विशेष रुप-

(i) यदि $n=-1$ हो तो

वक्र **सरल रेखा** $r\cos\theta = a$

(ii) यदि $n=1$ हो तो

वक्र **वृत** $r = a\cos\theta$

(iii) यदि $n=-\frac{1}{2}$ हो तो

वक्र **परवलय** $\frac{2a}{r} = 1+\cos\theta$

(iv) यदि $n=\frac{1}{2}$ हो तो

वक्र **कार्डिआयड** $2r = a(1+\cos\theta)$

(v) यदि $n=-2$ हो तो

वक्र **आयतित अतिपरवलय** $r^2\cos 2\theta = a^2$

(vi) यदि $n=2$ हो तो

वक्र **लेमिनिस्केट** $r^2 = a^2\cos 2\theta$

उदाहरण

1. वक्र $y = c\cdot\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ की अक्षों के समान्तर वक्रता जीवा ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$\because y = c\cdot\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{x}{c}\right), \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{c}\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$

x - अक्ष के समान्तर वक्रता जीवा $= \frac{2y_1(1+y_1^2)}{y_2}$

$= \frac{2\sinh\frac{x}{c}\left[1+\sinh^2\frac{x}{c}\right]}{\frac{1}{c}\cosh\left(\frac{x}{c}\right)}$

$= 2\sinh\frac{x}{c}\cdot\cosh\frac{x}{c}\cdot c = c\sinh\left(\frac{2x}{c}\right)$

y-अक्ष के समान्तर वक्रता जीवा $= \frac{2(1+y_1^2)}{y_2} = \frac{2(1+y_1^2)}{y_2}$

$= \frac{2\left(1+\sinh^2\frac{x}{c}\right)}{\frac{1}{c}\cosh\frac{x}{c}}$

$= 2c\cdot\cosh\frac{x}{c} = 2y$

2. वक्र $r^2 = a^2\cos 2\theta$ के ध्रुव से गुजरने वाली वक्रता जीवा ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$\because r^2 = a^2\cos 2\theta$

$2r\frac{dr}{d\theta} = -2a^2\sin 2\theta$

$\text{Tan}\,\phi = r\frac{d\theta}{dr} = r\left(\frac{-r}{a^2\sin 2\theta}\right) = -\frac{a^2\cos 2\theta}{a^2\sin 2\theta}$

$\tan\phi = -\cot 2\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)$

$\phi = \frac{\pi}{2}+2\theta$

वक्र का पदिक समीकरण $p = \text{r}\sin\phi$

$p = \text{r}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right) = \text{r}\cos 2\theta = r\cdot\frac{r^2}{a^2} = \frac{r^3}{a^2}$

वक्रता त्रिज्या $\rho = r\cdot\frac{dr}{dp} = r\cdot\frac{a^2}{3r^2} = \frac{a^2}{3r}$

ध्रुवान्तर रेखा पर लम्ब वक्रता जीवा $= 2\rho\cos\phi$

$= \frac{2\rho}{r}\sqrt{(r^2-p^2)} = \frac{2}{r}\cdot\frac{a^2}{3r}\sqrt{r^2-\left(\frac{r^3}{a^2}\right)^2}$

$= \frac{2a^2}{3r^2}\cdot\frac{r}{a^2}\cdot\sqrt{(a^4-r^4)} = \frac{2}{3r}\sqrt{(a^4-r^4)}$

मुल बिन्दु पर वक्रता (न्यृटन विधि) -

(i) वक्र $y = f(x)$ की मुल बिन्दु पर x-अक्ष वक्र की स्पर्श रेखा हो तो वक्र की वक्रता त्रिज्या

$\boldsymbol{\rho = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2}{2y}}$

(ii) वक्र $y = f(x)$ की मुल बिन्दु पर y-अक्ष वक्र की स्पर्श रेखा हो तो वक्र की वक्रता त्रिज्या

$\boldsymbol{\rho = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{y^2}{2x}}$

(iii) ध्रुवी वक्र $r = f(\theta)$ के लिए मुल बिन्दु पर वक्रता त्रिज्या

$\boldsymbol{\rho = \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\to 0}}\left(\frac{r}{2\theta}\right)}$

(iv) वक्र $y = f(x)$ की मुल बिन्दु पर स्पर्श रेखा अक्षो के अतिरिक्त अन्य रेखा हो।

$\boldsymbol{\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}}$ जहाँ $y = px + q\frac{x^2}{2!}+\cdots.$

Note: किसी वक्र की मूल बिन्दु पर स्पर्श रेखा न्यूनतम घात के पदो को शून्य रखकर प्राप्त की जा सकती है।

अर्थात् $a_1x + a_2y = 0$

उदाहरण

1. निम्न वक्रो की मुल बिन्दु पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात करो।
$\boldsymbol{y - x - 3x^2 + x^3 = 0}$

व्याख्या: -

$\because$ वक्र $y - x - 3x^2 + x^3 = 0$

मुल बिन्दु पर स्पर्श रेखा $y - x = 0$

$\because y = px + \frac{1}{2!}qx^2 + \cdots .....$

y का मान रखने पर

$\left(px + \frac{1}{2!}px^2 + \cdots .\right) - x - 3x^2 + x^3 = 0$

$(p-1)x + \left(\frac{q}{2} - 3\right)x^2 + \cdots \ldots \ldots = 0$

गुणाँकों की तुलना से $p - 1 = 0 \Rightarrow p = 1$

$\frac{q}{2} - 3 = 0 \Rightarrow q = 6$

वक्रता त्रिज्या $\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = \frac{(1+1)^{\frac{3}{2}}}{6}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

2. वक्र $\boldsymbol{r = a(\theta + \sin\ \theta)}$ के ध्रुव (मुल बिन्दु) पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात करो।

व्याख्या: -

ध्रुव पर वक्रता त्रिज्या

$$\rho = \lim_{\substack{r \to 0 \\ \theta \to 0}} \frac{r}{2\theta}$$

$$= \lim_{\substack{r \to 0 \\ \theta \to 0}} \frac{a(\theta + \sin\ \theta)}{2\theta} = \lim_{\substack{r \to 0 \\ \theta \to 0}} \frac{a}{2}\left(1 + \frac{\sin\ \theta}{\theta}\right)$$

$$= \frac{a}{2}(1+1) = a$$

यदि वक्र का समीकरण-

- $a_1x + a_2y + b_1x^2 + b_2xy + b_1y^2 + c_1x^3 + \cdots = 0$
  हो तो मुल बिन्दु पर वक्रता त्रिज्या
  $\rho = \frac{(a_1^2 + a_2^2)^{3/2}}{2(a_2^2b_1 - a_1a_2^2b_2 - a_1^2b_3)}$
  जहाँ $a_1 = x$ का गुणाँक
  $a_2 = y$ का गुणाँक
  $b_2 = x^2$ का गुणाँक
  $\dot{b}_2 = xy$ का गुणाँक
  $b_3 = y^2$ का गुणाँक

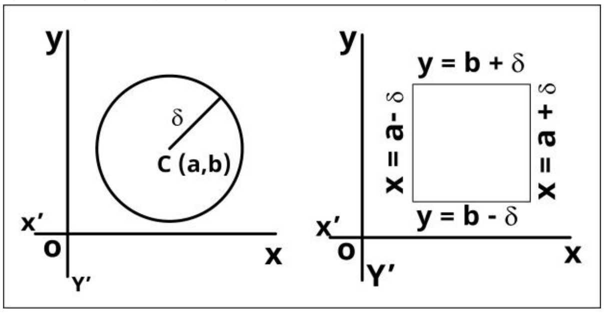
आंशिक अवकलन
(Partial Differention)

दो अथवा अधिक चर वाले फलन -

- फलन जिनका मान दो या अधिक चर राशियों पर निर्भर करता है।
- यदि चर z का मान दो चरो x तथा y के मान पर निर्भर करता है। तथा x और y को निश्चित मान देने पर चर z का निश्चित मान प्राप्त होता है तो z चरो x तथा y का फलन कहलाता है।
  $z = f(x, y)$
- जहाँ x तथा y स्वतन्त्र चर तथा z आश्रित चर कहलाता है।
- xy समतल में वह प्रदेश जिसके प्रत्येक बिन्दु पर z परिभाषित हो z का प्रान्त कहलाता है।
  जैसे:- बेलन का आयतन $\mathrm{V} = \pi r^2\ \mathrm{h}$
  जहाँ $r =$ बेलन के आधार की त्रिज्या तथा $\mathrm{h} =$ बेलन की ऊचाई
  यहाँ आयतन V , दो चर राशियों r तथा h का फलन है। r तथा h स्वतंत्र चर तथा V आश्रित चर कहलाता है।
- इसी प्रकार त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin\ \mathrm{A}$
- जहाँ b तथा c त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा A इन दोनों भुजाओं के मध्य कोण है।
  अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल Δ तीन चर राशियों b, c तथा A का फलन है।
  b, c तथा A स्वतन्त्र चर तथा $\triangle$ आश्रित चर कहलाता है।

बिन्दु (a, b) का प्रतिवेश -

- किसी स्वेच्छ धनात्मक अचर δ के लिए बिन्दुओं (x, y) का समुच्चय जो कि $|x - a| < \delta \Rightarrow a - \delta < x < a + \delta$ तथा $|y - b| < \delta \Rightarrow b - \delta < y < b + \delta$ प्रतिबन्ध का पालन करते है। बिन्दु (a, b) का δ प्रतिवेश कहलाता है।
- (a, b) का δ प्रतिवेश एक खुला वर्ग माना जा सकता है, जो कि सरल रेखाओं
  $x = a - \delta, x = a + \delta,$
  $y = b - \delta, y = b + \delta$ द्वारा परिबद्ध है।
  अथवा
  बिन्दु (a, b) का δ प्रतिवेश एक खुला वृत माना जा सकता है। जिसका केन्द्र (a, b) तथा त्रिज्या δ है।
  $(x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta^2$



दो चर राशि वाले फलनों की सीमा -

- यदि चर x, a की ओर तथा y, b की ओर अग्रसर हो तो फलन $f(x, y)$ की सीमा A की ओर अग्रसर होती है। यदि प्रत्येक स्वेच्छ अचर ϵ के लिए घनात्मक अचर δ का अस्तित्व इस प्रकार हो ताकि $|x - a| < \delta$ तथा $|y - b| < \delta$ के लिए $|f(x, y) - \mathbf{A}| < \epsilon$
  $\Rightarrow \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = \mathbf{A}$
  फलन $f(x, y)$ की सीमा A का अस्तित्व होगा यदि (x, y)

बिन्दु (a,b) की ओर किसी भी पथ से अग्रसर हो फलन $f(x,y)$ की सीमा सदैव A प्राप्त हो।

$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = \lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right]$

$= \lim_{y\to b}[\lim_{x\to a} f(x,y)]$

दो चर राशि वाले फलनो की सांतत्यता -

– फलन $f(x,y)$ बिन्दु (a,b) पर सतंत कहलाता है यदि सीमा $\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = f(a,b)$ (प्रत्येक पथ पर) सत्य हो-

अथवा

फलन $f(x,y)$ बिन्दु (a,b) पर सतंत होगा यदि स्वेच्छ धनात्मक संख्या ϵ के संगत धनात्मक अचर δ (ϵ पर निर्भर) का अस्तित्व इस प्रकार हो ताकि प्रत्येक (x,y) के लिए-

$|x-a| < \delta$ तथा $|y-b| < \delta$

$|f(x,y) - f(a,b)| < \epsilon$

आशिंक अवकलन गुणाँक -

– यदि z दो चर राशियों x तथा y का फलन हो $z = f(x,y)$ तो

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\delta x\to 0} \frac{f(x+\delta x,y)-f(x,y)}{\delta x}$ की सीमा

– विद्यमान होने पर इसे z का x के सापेक्ष आंशिक अवकलन गुणाँक कहते है।

– फलन $z = f(x,y)$ का x के सापेक्ष आशिंक अवकलन गुणाँक $f\ (x,y)$ का x के सापेक्ष साधारण अवकलन गुणाँक ही होता है यदि अन्य स्वतन्त्र चर y को अचर माना जाए

इसी प्रकार $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\delta y\to 0} \frac{f(x,y+\delta y)-f(x,y)}{\delta y}$ की सीमा विद्यमान होने पर इसे z का y के सापेक्ष आंशिक अवकलन गुणाँक कहते है।

उच्च क्रम के आंशिक अवकलन गुणाँक -

– यदि z चरो x तथा y का फलन हो $z = f(x,y)$

प्रथम कोटी के आंशिक अवकलज-

(i) $f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\delta x\to 0} \frac{f(x+\delta x,y)-f(x,y)}{\delta x}$

(ii) $f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\delta y\to 0} \frac{f(x,y+\delta y)-f(x,y)}{\delta y}$

– यदि यह सीमा विद्यमान हो

पुन: द्वितीय कोटी का आंशिक अवकलज-

(i) z का x के सापेक्ष द्वितीय आंशिक अवकलज

$f_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \lim_{\delta y\to 0} \frac{f_x(x+\delta x,y)-f_x(x,y)}{\delta x}$

यदि यह सीमा विद्यमान हो

(ii) z का y के सापेक्ष द्वितीय आंशिक अवकलज

$f_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \lim_{\delta y\to 0} \frac{f_y(x,y+\delta y)-f_y(x,y)}{\delta y}$

यदि यह सीमा विद्यमान हो।

(iii) $f_{yx} = \frac{\partial z}{\partial x}$ का y के सापेक्ष आंशिक अवकलज

$f_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \lim_{\delta y\to 0} \frac{f_x(x,y+\delta y)-f_x(x,y)}{\delta y}$

(iv) $f_{xy} = \frac{\partial z}{\partial y}$ का x के सापेक्ष आंशिक अवकलज

$f_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lim_{\delta x\to 0} \frac{f_y(x+\delta x,y)-f_y(x,y)}{\delta x}$

यदि यह सीमा विद्यमान हो

– यदि $u = f(x,y)$ के आंशिक अवकलज संतत हो तो $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Rightarrow f_{xy} = f_{yx}$

– यह आंशिक अवकलजों का क्रम विनिमेय गुणधर्म कहलाता है।

उदाहरण

1. यदि $u = \log\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$ हो तो $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = ?$

व्याख्या: - -

$\because u = \log(x^3+y^3+z^3-3xyz)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{(x^3+y^3+z^3-3xyz)} \times [3x^2 - 3yz]$

$= \frac{3(x^2-yz)}{(x^3+y^3+z^3-3xyz)}$

इसी प्रकार $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3(y^2-xz)}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$

$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3(z^2-xy)}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$

जोड़ने पर $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$

$= \frac{3}{x+y+z}$

$\left[\begin{array}{c}\because x^3+y^3+z^3-3xyz \\ = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\end{array}\right]$

2. $x^x y^y z^z = c$ (अचर) तो $x = y = z$ पर $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ?$

व्याख्या: - -

$\because x^x y^y z^z = c$

$z^z = \frac{c}{x^x y^y}$

log लेने पर $z\log z = \log c - x\log x - y\log y$

x के सापेक्ष आंशिक अवकलन

$\left(z \cdot \frac{1}{z} + \log z\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 - \left(x \cdot \frac{1}{x} + \log x\right)$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(\frac{1+\log x}{1+\log z}\right)$

इसी प्रकार $\frac{\partial z}{\partial y} = -\left(\frac{1+\log y}{1+\log z}\right)$

$\because \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\left(\frac{1+\log y}{1+\log z}\right)\right]$

$= \frac{(1+\log y)}{(1+\log z)^2} \cdot \left[\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right]$

$= \frac{(1+\log y)}{z(1+\log z)^2} \times -\frac{(1+\log x)}{(1+\log z)}$

$= \frac{-(1+\log x)(1+\log y)}{z(1+\log z)^3}$

$x = y = z$ पर $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-1}{x(1+\log x)} = \frac{-1}{x\log(ex)}$

3. यदि $u = \log r$ तथा $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ हो तो $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = ?$

व्याख्या: -

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{(x-a)}{r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(x-a)}{r^2}\right)$$

$$= \left[(x-a) \cdot \left(-\frac{2}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot 1\right]$$

$$= \left[\frac{-2(x-a)}{r^3} \cdot \frac{(x-a)}{r} + \frac{1}{r^2}\right]$$

$$= \frac{-2(x-a)^2}{r^4} + \frac{1}{r^2}$$

इसी प्रकार $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-2(y-b)^2}{r^4} + \frac{1}{r^2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{-2(z-c)^2}{r^4} + \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$= \frac{-2}{r^4}[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2] + \frac{3}{r^2}$$

$$= \frac{-2}{r^4}(r^2) + \frac{3}{r^2} = \frac{1}{r^2}$$

समघात फलन पर आयलर प्रमेय

- यदि दो या दो से अधिक चरो का फलन f, इस प्रकार है ताकि इसके प्रत्येक पद में चरो (जैसे x, y, z आदि) की घातों का योग सदैव एक समान n हो तो इस फलन को n घात का समघात फलन कहते है।

$$f(x,y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots \ldots + a_ny^n$$

$$= x^n\left(a_0 + a_1\left(\frac{y}{x}\right) + a_2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \cdots \ldots + a_n\left(\frac{y}{x}\right)^n\right)$$

$$f(x,y) = x^n \, \mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)$$

इसी प्रकार $f(x,y) = y^n\phi\left(\frac{x}{y}\right)$

इसी प्रकार

$$f(x,y,z) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-1}z + a_3x^{n-2}yz \ldots \ldots$$

$$= x^n\left[a_0 + a_1\left(\frac{y}{x}\right) + a_2\left(\frac{z}{x}\right) + a_3\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{z}{x}\right) + \cdots \ldots \ldots\right]$$

$$f(x,y,z) = x^n\phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

ऑयलर प्रमेय -

- **यदि $u = f(x,y)$ चरो x तथा y में n घात का समघात फलन हो तो**

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf$$

$$\because \; u = f(x,y) = x^nF\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^nF'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{-y}{x}\right) + F\left(\frac{y}{x}\right)nx^{n-1}$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} = -yx^{n-1}F'\left(\frac{y}{x}\right) + nx^nF\left(\frac{y}{x}\right) \ldots \ldots (i)$$

इसी प्रकार $\frac{\partial f}{\partial y} = x^nF'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$

$$y\frac{\partial f}{\partial y} = x^{n-1}yF'\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (ii)$$

(i) + (ii) $\quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf$

- **यदि $u = f(x,y,z)$ चरो x, y तथा z में n घात का समघात फलन हो तो**

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = nu$$

$$u = f(x,y,z) = x^n \, \mathrm{F}\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

$u = x^n \, \mathrm{F}(v,w) \qquad$ जहाँ $v = \frac{y}{x}, w = \frac{z}{x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^n\frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + x^n\frac{\partial F}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + F \cdot nx^{n-1}$$

$$= x^n\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{-y}{x^2}\right) + x^n\frac{\partial F}{\partial w}\left(\frac{-z}{x^2}\right) + nx^{n-1}F$$

$$= -yx^{n-2}\frac{\partial F}{\partial v} - zx^{n-2}\frac{\partial F}{\partial w} + nx^{n-1}F$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} = -yx^{n-1}\frac{\partial F}{\partial v} - zx^{n-1}\frac{\partial F}{\partial w} + nx^nF$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} = -yx^{n-1}\frac{\partial F}{\partial v} - zx^{n-1}\frac{\partial F}{\partial w} + nu \ldots \ldots \ldots . (i)$$

इसी प्रकार

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^n\frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = x^n\frac{\partial F}{\partial v} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = x^{n-1}\frac{\partial F}{\partial v}$$

$$y\frac{\partial u}{\partial y} = x^{n-1}y\frac{\partial F}{\partial v} \ldots \ldots \ldots \ldots (ii)$$

$$z\frac{\partial u}{\partial z} = x^{n-1}z\frac{\partial F}{\partial w} \ldots \ldots \ldots \ldots (iii)$$

(i) + (ii) + ((iii)

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = nu$$

व्यापक रूप में आयलर प्रमेय -

- यदि $f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_m)$ चरो $x_1, x_2, \ldots x_m$ का n घात का समघात फलन हो तो

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots \ldots . . + x_m\frac{\partial f}{\partial x_m} = nf$$

अन्य महत्वपूर्ण परिणाम -

- यदि फलन $f(x,y)$ चरों x तथा y का n घात का समघात फलन हो तो

(i) $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (n-1)\frac{\partial f}{\partial x}$

(ii) $x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (n-1)\frac{\partial f}{\partial y}$

(iii) $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1)f$

उदाहरण:

1. $u = \sin^{-1}\left[\frac{x^2+y^2}{x+y}\right]$ **हो तो** $\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

व्याख्या: -

$$u = \sin^{-1}\left[\frac{x^2+y^2}{x+y}\right]$$

$$z = \sin u = x\left[\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)}\right]$$

अतः $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 1.z$

$$x\frac{\partial}{\partial x}(\sin u) + y\frac{\partial z}{\partial y}(\sin u) = \sin u$$

$$\text{x}\cos u\frac{\partial u}{\partial x} + \text{y}\cos u\frac{\partial u}{\partial y} = \sin u$$

$$\Rightarrow x\frac{\partial u}{\partial u} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$$

2. $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{x-y}\right)$ **हो तो** $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ?$

व्याख्या: -

$$u = \tan^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{x-y}\right)$$

$$z = \tan u = x\left[\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-\left(\frac{y}{x}\right)}\right] \ldots\ldots\ldots (i)$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 1 \cdot z$$

$$x\frac{\partial}{\partial x}(\tan\ u) + y\frac{\partial}{\partial y}(\tan\ u) = \tan\ u$$

(ii) का x के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot 1 + y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

$$= \frac{1}{2}\times 2\cos\ 2u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

इसी प्रकार (ii) का y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$\text{x}\frac{\partial^2 \text{u}}{\partial x\partial y} + \text{y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\cos 2\text{u}-1)\frac{\partial \text{u}}{\partial \text{y}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{iv})$$

(iii) का x तथा (iv) को y से गुणा करके जोड़ने पर

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\cos\ 2u - 1)\left[x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\cos\ 2u - 1)\frac{1}{2}\sin\ 2u$$

3. $u = \frac{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{5}}+y^{\frac{1}{5}}}$

व्याख्या: -

$$u = \frac{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{5}}+y^{\frac{1}{5}}}$$

$$u = x^{\frac{1}{20}}\left[\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{4}}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{5}}}\right] = x^{\frac{1}{20}}\phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

आयलर प्रमेय के कथन से- $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{20}u$

– **यदि u चरों x तथा y में n घात का समघात फलन हो तो-**

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = n\frac{f(u)}{f'(u)}$$

4. **यदि** $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{x-y}\right)$ **हो तो** $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial u} = ?$

व्याख्या: -

(माना) $z = \tan\ y = \frac{x^3+y^3}{x-y} = x^2\left(\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3}{1-\left(\frac{y}{x}\right)}\right)$

जो कि x, y में दो घात का समघात फलन है अतः आयलर प्रमेय से

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

$$x\frac{\partial}{\partial x}(\tan\ u) + y\frac{\partial}{\partial y}(\tan\ u) = 2\tan\ u$$

$$x\sec^2\ u\frac{\partial u}{\partial x} + y\sec^2\ u\frac{\partial u}{\partial y} = 2\tan\ \text{u}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2\tan\ u}{\sec^2\ u} \Rightarrow x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \sin\ 2u$$

5. **यदि** $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{x+y}\right)$ **हो तो** $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ?$

व्याख्या: -

$$z = \tan\ u = \frac{x^3+y^3}{x+y}$$

आयलर प्रमेय से

$$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2.z$$

$$x\frac{\partial}{\partial x}(\tan\ u) + y\frac{\partial}{\partial y}(\tan\ u) = 2\tan\ u$$

$$x\sec^2\ u\frac{\partial u}{\partial x} + y\sec^2\ u\frac{\partial u}{\partial y} = 2\tan\ u$$

$$x\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2\text{u} \ldots\ldots..(\text{i})$$

(i) का x के सापेक्ष आशिंक अवकलन

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot 1 + y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 2\cos 2u\frac{\partial u}{\partial x}\ldots. \qquad (ii)$$

(i) का y के सापेक्ष आशिंक अवकलन

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot 1 = 2\cos 2u\frac{\partial u}{\partial y}\ldots\ldots\ldots(iii)$$

(ii) को x तथा (iii) को y से गुणा करके जोड़ने पर $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$= (2\cos\ 2u - 1)\cdot\sin\ 2u$$

– किसी भी फलन का आंशिक अवकलन गुणाँक इस बात पर निर्भर करता है कि आँशिक अवकलन करते समय किस चर को अचर माना गया है।

समान्यतया स्पष्ट निर्देश नही दिये होने पर

(i) r के सापेक्ष आशिंक अवकलन की स्थिति में θ को अचर लिया जाता है।

(ii) θ के सापेक्ष आशिंक अवकलन की स्थिति में r को अचर लिया जाता है।

(iii) x के सापेक्ष आशिंक अवकलन की स्थिति में y को अचर लिया जाता है।

(iv) y के सापेक्ष आशिंक अवकलन की स्थिति में x को अचर लिया जाता है।

यदि $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ हो तो

$r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

(v) $\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta = \cos\theta, \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y$

$= \frac{x}{r} = \cos\theta \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial r}{\partial x}$

(vi) $\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)_\theta = \sin\theta, \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)_x$

$= \frac{y}{r} = \sin\theta \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial r}{\partial y}$

(vii) $\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)_r = -\mathrm{r}\sin\theta, \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_y$

$= \frac{-y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\theta}{r}$

$\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \theta} = r^2\frac{\partial \theta}{\partial x}$

(viii) $\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)_r = \mathrm{r}\cos\theta, \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_x$

$= \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta}{r}$

$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial \theta} = r^2\frac{\partial \theta}{\partial y}$

(ix) $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^2}\right)$

$= -y\left(-\frac{2}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \frac{2y}{r^3}\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{r^2}$

$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\sin 2\theta}{r^2}$

(x) $\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$

$= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-\sin 2\theta}{r^2}$

(xi) $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos\theta)$

$= -\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\sin\theta\cdot\frac{(-\sin\theta)}{r} = \frac{\sin^2\theta}{r}$

(xii) $\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(\sin\theta)$

$= \cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos^2\theta}{r}$

(xiii) $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r}$

(xiv) $\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = 1$

अत:

$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta$	$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = \cos\theta$
$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta$	$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = \sin\theta$
$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{(x^2+y^2)} = \frac{-\sin\theta}{r}$	$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -y = -r\sin\theta$
$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{(x^2+y^2)} = \frac{\cos\theta}{r}$	$\frac{\partial y}{\partial \theta} = x = r\cos\theta$
$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial r}{\partial x}$	$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial r}{\partial y}$
$\frac{\partial x}{\partial \theta} = r^2\frac{\partial \theta}{\partial x}$	$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r^2\frac{\partial \theta}{\partial y}$
$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin\theta}{r}$	$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cos^2\theta}{r}$
$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\sin^2\theta}{r^2}$	$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\sin 2\theta}{r^2}$
$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r}$	$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$	

संपूर्ण अवकलन गुणाँक-

– यदि $u = f(x,y)$ चरो x तथा y का फलन हो तथा x और y पृथक-पृथक चर t के फलन हो

अर्थात $x = \phi(t), y = \psi(t)$ हो तो $\frac{du}{dt}$ फलन u का चर t के सापेक्ष सम्पूर्ण अवकलन गुणाँक कहलाता है।

$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$

पूनः यदि $u = f(x,y)$ चर x तथा y का फलन तथा $x = \phi(t_1, t_2), y = \psi(t_1, t_2)$ चरो t_1 तथा t_2 का फलन हो तो

$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_1},$

$\frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_2}$

अस्पष्ट फलनों के अवकलन गुणाँक-

– यदि $f(x,y) = c$ चर x, y का अस्पष्ष्ट फलन हो तो

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{p}{q},$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(q^2r - 2pqs + p^2t)}{q^3}$

जहाँ $p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$

$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

उदाहरण:

यदि $x^3+y^3-3ax^2=0$ हो तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}=-\frac{(3x^2-6ax)}{(3y^2)}=\frac{2ax-x^2}{y^2}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y^2(2a-2x)-(2ax-x^2)\cdot 2y\frac{dy}{dx}}{y^4}$

$=\frac{1}{y^4}\left[y^2(2a-2x)-(2ax-x^2)\cdot 2y\left(\frac{2ax-x^2}{y^2}\right)\right]$

$=\frac{1}{y^5}[(3ax^2-x^3)(2a-2x)-8a^2x^2-2x^4+8ax^3]$

$=\frac{1}{y^{[}}[-2a^2x^2]\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2a^2x^2}{y^5}$

दो चर के फलन के लिए टेलर प्रमेय-

– यदि फलन $f(x,y)$ के n वी कोटी के आंशिक अवकलन सतत् रूप से विघमान है तथा अनन्त प्रसार वैध हो तो

$f(x+h,y+k)=f(x,y)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f+\cdots\ldots.+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf+\cdots$

सन्निकट परिकलन -

– यदि $f(x,y)$ चरो x तथा y का फलन हो तो x में अल्प परिवर्तन δx तथा y में अल्प परिवर्तन δy के संगत $f(x,y)$ में परिवर्तन $\delta f(x,y)=f(x+\delta x,y+\delta y)-f(x,y)$

$=f(x+\delta x,y+\delta y)-f(x,y+\delta y)+f(x,y+\delta y)-f(x,y)$

$=\frac{f(x+\delta x,y+\delta y)-f(x,y+\delta y)}{\delta x}x\delta x+\frac{(x,y+\delta y)-f(x,y)}{\delta y}\times\delta y$

$=\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x,y+\delta y)-f(x,y+\delta y)}{\delta x}\times\delta x$

$+\lim_{\delta y\to 0}\frac{(x,y+\delta y)-f(x,y)}{\delta y}\times\delta y$

$\delta f=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\delta y$

व्यापक रूप में यदि फलन f, n चरो $x_1,x_2,\ldots,x_n$ का फलन हो तो $\delta f=\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\delta x_2+\cdots\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n},\delta x_n$

उदाहरण:

1. $u=f(x,y)=x\sin\,y+y\sin\,x$ तथा $x=\log\,t, y=e^t$ तो $\frac{du}{dt}$ का मान ?

(a) $(x\cos\,y+\sin\,x)\frac{1}{t}+(\sin\,y+y\cos\,x)e^t$

(b) $(\sin\,y+y\cos\,x)\frac{1}{t}$

(c) $(x\cos\,y+\sin\,x)e^t+(\sin\,y+y\cos\,x)\frac{1}{t}$

(d) $\left(\sin\,ye^t+\frac{\sin\,x}{t}\right)$ **[a]**

व्याख्या: -

$\frac{\partial u}{\partial x}=\sin y+y\cos x \qquad \frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=x\cos y+\sin x \qquad \frac{dy}{dt}=e'$

$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$

$=(\sin\,y+y\cos\,x)\cdot\frac{1}{t}+(x\cos\,y+\sin\,x)\cdot e'$

2. यदि $u=x^2+y^2, x=\log\,t, y=e^t$ हो तो $\frac{du}{dt}$ का मान ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$\because\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$

$=2x\cdot\frac{1}{t}+2y\cdot e^t$

3. यदि $y^x+x^y=c$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}=-\left(\frac{y^x\log\,y+yx^{y-1}}{xy^{x-1}+x^y\log\,x}\right)$

4. यदि $u=\sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ तो $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ का मान है।

(a) 0 (b) $u^{\frac{1}{2}}$

(c) u (d) $2u$ **[a]**

व्याख्या: -

माना $v=\sin^{-1}\frac{x}{y}\Rightarrow\sin\,v=\frac{x}{y}$

$\because$ यह शुन्य कोटी का फलन है। अत: आयलर प्रमेय से

$x\frac{\partial}{\partial x}(\sin v)+y\frac{\partial}{\partial y}(\sin v)=0\cdot\sin v$

अथवा $x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}=0\ldots\ldots.(i)$

इसी प्रकार माना $w=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\Rightarrow\tan\,w=\frac{y}{x}$

अत; $x\frac{\partial w}{\partial x}+x\frac{\partial w}{\partial y}=0$

(i) + (ii) $x\frac{\partial}{\partial x}(v+w)+y\frac{\partial}{\partial y}(v+w)=0$

$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$

5. यदि $F(u)=f(x,y,z)$, चर x,y,z का n घात का समघात फलन है। तथा $u_x=\frac{\partial u}{\partial x}, u_y=\frac{\partial u}{\partial x}, u_z=\frac{\partial u}{\partial z}$ तो $xu_x+yu_y+zu_z=$

(a) $n\,\mathrm{F}(u)$

(b) $n\frac{F'(u)}{F(u)}$

(c) $n\frac{F(u)}{F'(u)}$

(d) $\frac{F(u)}{F'(u)}$ **[c]**

व्याख्या: -

(माना) $v=\mathrm{F}(u)=f(x,y,z)$

अत: आयलर प्रमेय के कथन से

$x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}+z\frac{\partial v}{\partial z}=n\cdot v$

$x\frac{\partial}{\partial x}[F(u)]+y\frac{\partial}{\partial x}[F(u)]+z\frac{\partial}{\partial z}[F(u)]=nF(u)$

$xF'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+yF'(u)\frac{\partial u}{\partial y}+zF'(u)\frac{\partial u}{\partial z}=nF(u)$

$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{nF(u)}{F'(u)}$

6. यदि $f = \sin^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$ हो तो $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ बराबर है।

(a) f
(b) $2f$
(c) $\sin f$
(d) $\tan f$ **[d]**

व्याख्या: -

(माना) $u = \sin f = x\left[\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)}\right]$

अतः ऑयलर प्रमेय के कथन से $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 1, u$

$\Rightarrow x\frac{\partial}{\partial x}(\sin f) + y\frac{\partial}{\partial y}(\sin f)$

$= \sin f$ $x\cos f\frac{\partial f}{\partial x} + y\cos f\frac{\partial f}{\partial y} = \sin f$

$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sin f}{\cos f} = \tan f$

7. यदि $u = x^4y^2$ जहाँ $x = t^2, y = t^3$ हो तो $\frac{\partial u}{\partial t} =$

(a) $22\rho^3$
(b) $14t^{13}$
(c) $\frac{22}{23}t^{11}$
(d) $\frac{23}{22}t^{22}$ **[b]**

व्याख्या: -

$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \times \frac{dy}{dt}.$
$= 4x^3y^2 \times 2t + 2x^4y \times 3t^2$
$= 8(t^2)^3(t^3)^2t + 6(t^2)^4(t^3)\cdot t^2$
$= 8t^{13} + 6t^{13} = 14t^{13}$

8. यदि $u = \cos(xy), x = e^t, y = e^{-t}$ हो तो $\frac{du}{dt}$ का मान ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$\because \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$
$= -\sin(xy)\cdot y\cdot e^t + (-\sin(xy)\cdot x)(-e^{-t})$
$= [-ye^t + xe^{-t}]\sin(xy)$
$= [-yx + x.y]\sin(xy) = 0$

9. यदि $z = \log(x^2+y^2)$ हो तो $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ बराबर है।

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3 **[c]**

व्याख्या: -

$Z = \log(x^2+y^2)$

$u = e^z = x^2\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]$

अतः आयलर प्रमेय से $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$

$x\frac{\partial}{\partial x}(e^z) + y\frac{\partial}{\partial y}(e^z) = 2e^z$

$xe^z\frac{\partial z}{\partial x} + ye^z\frac{\partial z}{\partial y} = 2e^z$

$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$

10. यदि $u = x^my^n$ है तो

(a) $du = mx^{m-1}y^n + nx^my^{n-1}$
(b) $du = mdx + ndy$
(c) $udu = mxdx + nydy$
(d) $\frac{du}{u} = \frac{mdx}{x} + \frac{ndy}{y}$ **[d]**

व्याख्या: -

$u = x^my^n$
$\operatorname{Log} u = \log(x^my^n)$
$\log u = \text{m}\log x + \text{n}\log y$
अवकलन करने पर
$\frac{1}{u}du = m\cdot\frac{1}{x}dx + n\frac{1}{y}\cdot dy$
$\Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{m}{x}dx + \frac{n}{y}dy$

11. माना $u = f(y-z, z-x, x-y)$ तो $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} =$

(a) 3
(b) 2
(c) 1
(d) 0 **[d]**

व्याख्या: -

माना $t_1 = y-z, t_2 = z-x, t_3 = x-y$
$u = f(t_1, t_2, t_3)$
$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t_1}\times\frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t_2}\times\frac{\partial t_2}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t_3}\times\frac{\partial t_3}{\partial x}$
$= \frac{\partial u}{\partial t_1}(0) + \frac{\partial u}{\partial t_2}(-1) + \frac{\partial u}{\partial t_3}(1) = -\frac{\partial u}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial t_3}$
इसी प्रकार $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t_1} - \frac{\partial u}{\partial t_3}$ तथा $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2}$
जोड़ने पर $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

12. $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3+y^3+x^2y-xy^2}{x^2-xy+y^2}\right)$ हो तो $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial y}{\partial y} =$

(a) $\frac{1}{2}\sin 2u$
(b) $\sin 2u$
(c) $\sin u$
(d) 0 **[a]**

व्याख्या: -

(माना) $z = \tan u = x\left[\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3+\left(\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right]$

आयलर प्रमेय के कथन से $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 1.z$

$x\frac{\partial}{\partial x}(\tan u) + y\frac{\partial}{\partial y}(\tan u) = \tan u$

$x\sec^2 u\frac{\partial u}{\partial x} + y\sec^2 u\frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$

$x\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tan u}{\sec^2 u} = \frac{1}{2}\sin 2u$

वास्तविक संख्याएँ का अभिगृहीत

- वास्तविक संख्या निकाय R के गुणधर्मों को समझाने के लिए अभिगृहीतो को तीन भागो में विभाजित किया जाता है ।
  (I) क्षेत्र अभिगृहीत
  (II) क्रम अभिगृहीत
  (III) पुर्णता अभिगृहीत

(I) क्षेत्र अभिगृहीत -

- अरिक्त समुच्चय F दो द्विचर सक्रिया $(+)$ तथा $(.)$ सहित क्षेत्र कहलाता है यदि निम्न अभिगृहीतो को सन्तुष्ट करता है।

(i) योग अभिगृहीत -

- **योग का सवृंत नियम**
  $a+b \in F \qquad \forall a,b \in F$
- **योग साहचर्यता नियम**
  $a+(b+c)=(a+b)+c \qquad \forall a,b,c \in F$
- **योज्य तत्समक नियम**
  $\forall a \in F \quad \exists 0 \in F$ ताकि $0+a=a+0=a$
- **योज्य प्रतिलोम अवयव**
  $\forall a \in F \qquad \exists b \in F$
  $a+b=b+a=0$
  b को a का योज्य प्रतिलोम कहते है तथा $b=-a$
- **योग क्रमविनिमेयता**
  $a+b=b+a \qquad \forall a,b \in F$

(ii) गुणन अभिगृहीत -

- **गुणन सवृंत नियम**
  $a.b \in F \qquad \forall a,b \in F$
- **गुणन साहचर्यता**
  $a.(b.c)=(a.b).c \qquad \forall a,b,c \in F$
- **गुणन तत्समक अवयव**
  $\forall a \in F \quad \exists 1 \in F$ ताकि $a.1=1.a=a$
- **गुणन प्रतिलोम अवयव**
  $\forall a \neq 0, \quad a \in F \,\exists b \in F$ ताकि $a.b=b.a=1$
  b को a का गुणन प्रतिलोम कहते है तथा $b=a^{-1}$
- **गुणन क्रमविनिमेयता**
  $a.b=b.a \qquad \forall a,b \in F$

(iii) बँटनता -

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ (वामबटनता)
$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$ (दक्षिण बंटनता)

क्षेत्र के उदाहरण-

1. परिमेय संख्याओं का समुच्चय $(Q,+,.)$ क्षेत्र है।
2. वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $(R,+,.)$ क्षेत्र है।
3. पुर्णांकों का समुच्चय $(Z,+,.)$ क्षेत्र नहीं है, क्योंकि प्रत्येक $a \in Z$ का गुणनप्रतिलोम $a^{-1} \notin Z$
4. प्राकृत संख्या का समुच्चय $(N,+,.)$ क्षेत्र नहीं है।

क्षेत्र के गुणधर्म –

- क्षेत्र में योज्य तत्समक अवयव (शून्य) अद्वित्तीय होते है
- क्षेत्र में गुणन तत्समक अवयव (इकाई) अद्वित्तीय होते है
- क्षेत्र के प्रत्येक अवयव को योज्य प्रतिलोम अद्वित्तीय होता है ।
- क्षेत्र के प्रत्येक अशून्य अवयव का गुणन प्रतिलोम अद्वितीय होता है
- निरसन नियम योज्य निरसन नियम
  $\forall a,b,c \in \mathbf{F}$
  $a+c=b+c \Rightarrow a=b$ दक्षिण निरसंन नियम
  $c+a=c+b \Rightarrow a=b$ वाम निरसन नियम
  गुणन निरसन नियम
  $a.c=b.c \quad \Rightarrow a=b \quad c \neq 0$ दक्षिण निरसन नियम
  $c.a=c.b \quad \Rightarrow a=b \quad c \neq 0$ वाम निरसन नियम
- $a,b \in F$ तो समीकरण $a+x=b$ का F में अद्वित्तीय हल , $\boldsymbol{x=-a+b}$ विद्यमान होता है ।
- $a,b \in F$ तो समीकरण $ax=b$ का F में अद्वित्तीय हल, $\boldsymbol{x=a^{-1}\cdot b}$ विद्यमान होता है ।
- $a.0=0.a=0 \qquad \forall a \in F$
- क्षेत्र F में योज्य तत्समक अवयव (0) तथा गुणन तत्समक अवयव (1) सदैव भिन्न होते हैं अर्थात् $0 \neq 1$
- $\forall a,b \in F,\ a\cdot b=0 \quad \Rightarrow$ या $a=0$ या $b=0$
- $(a.b)^{-1}=a^{-1}\cdot b^{-1} \qquad 0 \neq a,b \in F$

(II) क्रम अभिगृहीत -

(a) धनात्मकता, ऋणात्मकता अभिगृहीत

- F का अवयव x धनात्मक कहलातां है यदि $x>0$ तथा ऋणात्मक कहलाता है यदि $x<0$.

(b) धनात्मक वर्ग–

- क्षेत्र F का उपसमुच्चय P धनात्मक वर्ग कहलाता है यदि
  (i) $\forall x,y \in P, \quad x+y \in P, \qquad x.y \in P$
  (ii) यदि $0 \neq x \in F$ तो $x \in P$ या $-x \in P$
- क्षेत्र F का उपसमुच्चय P (धनात्मक वर्ग) का प्रत्येक अवयव क्षेत्र F के शून्य से बड़ा होता है।
- क्षेत्र F के शून्य से बड़े सभी अवयव धनात्मक वर्ग P के अवयव होते है।
- क्षेत्र F का प्रत्येक अशून्य अवयव $a \neq 0$ के लिए a तथा a^{-1} समान चिन्ह युक्त (अर्थात दोनों धनात्मक अथवा दोनों ऋणात्मक) होते है।

(c) क्रम अभिगृहीत -

- **त्रिविभागी नियम** $\forall x, y \in$ F निम्न में केवल एक ही सत्य है।
  $x > y$ या $x = y$ या $x < y$
- **सक्रामंक नियम –**
  $\forall x, y, z \in \mathrm{F}, \quad x > y, \quad y > z \quad \Rightarrow x > z$
- **योज्य एक दिष्ट नियम -**
  $\forall x, y, z \in \mathrm{F} \quad x > y \quad \Rightarrow x + z > y + z$
- **गुणन एक दिष्ट नियम -**
  $\forall x, y, z \in \mathrm{F}, \quad z > 0, \quad x > y \quad \Rightarrow xz > yz$

III. क्रम पूर्णता अभिगृहीत

निम्नक अभिगृहीत (G.L.B. Axiom)-

- क्रमित क्षेत्र F के प्रत्येक नीचे से परिबद्ध अरिक्त उपसमुच्य S का निम्नक F में विद्यमान होता है।
  $\beta = \mathrm{Inf}(S) \in F$

उच्चक अभिगृहीत (L.U.B Axiom)-

- क्रमित क्षेत्र F के प्रत्येक ऊपर से परिबद्ध अरिक्त उपसमुच्चय S का उच्चक F में विद्यमान होता है।
  $\alpha = \mathrm{Sup(S)} \in \mathrm{F}$

पूर्ण क्रमित क्षेत्र -

- जो क्रमित क्षेत्र क्रम पूर्णता अभिगृहीतो का पालन करता है। पूर्ण क्रमित क्षेत्र कहलाता है। पूर्ण क्रमित क्षेत्र अद्वितिय होता है। इसे वास्तविक संख्याओं का क्षेत्र भी कहते है।
  अथवा
- एक क्रमित क्षेत्र F पूर्ण क्रमित क्षेत्र कहलाता है यदि F के प्रत्येक अरिक्त उपसमुच्चय $S \subseteq F$ जो कि ऊपर से परिबद्ध है का उच्चक, F में हो

1. वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $(R, +, .)$ पूर्ण क्रमित क्षेत्र है।
2. परिमेय संख्याओं का समुच्चय का समुच्चय $(Q, +, .)$ एकक्रमित क्षेत्र है किन्तु पूर्ण क्रमित क्षेत्र नहीं है।

क्रमित क्षेत्र (Ordered Field)-

- वे क्षेत्र जिनके अवयवय क्रम अभिगृहीत के नियमों का पालन करते हैं, उन्हें क्रमित क्षेत्र कहा जाता है।
- क्रमित क्षेत्र अनंत होते हैं।
- परिमेय संख्याओं का समूह (Q, +,.) और वास्तविक संख्याओं का समूह (R, +, .) क्रमित क्षेत्र के उदाहरण हैं।
- सम्मिश्र संख्याओं का समूह (C, +, .) क्रमित क्षेत्र नहीं है, क्योंकि यह क्रम अभिगृहीत के नियमों का पालन नहीं करता।

क्रमित क्षेत्र के परिबंध -

(a) उपरि परिबंध -

- क्रमित क्षेत्र F का अवयव K, F के अरिक्त उपसमुच्चय S का एक उपरि परिबन्ध कहलाता है यदि S का प्रत्येक अवयव K से कम अथवा बराबर हो
  $\mathrm{x} \leq \mathrm{K} \quad \forall x \in S, \quad \mathrm{K} \in \mathrm{F}$
  तथा समुच्चय S उपर से परिबद्ध कहलाता है।
  (i) यदि इस प्रतिबंध का पालन करने वाले अवयव K का अस्तित्व नहीं है, तो S उपर से अपरिबद्ध कहलाता है।
  (ii) यदि K समुच्चय S का उपरि परिबंध हो तो K तथा K से बड़ी प्रत्येक संख्याँ S का उपरि परिबंध कहलाता है। अतः उपरिपरिबंधो का समुच्चय अपरिमित होता है।
  (iii) समुच्चय S के प्रत्येक उपरि परिबंध का समुच्चय S का अवयव होना आवश्यक नहीं है। किन्तु यह क्षेत्र F का अवयव होता है।

(b) न्यूनतम उपरि परिबंध या उच्चक -

- यदि F का अरिक्त उपसमूच्चय S ऊपर से परिबद्ध है तो के S उपरि परिबन्धो में सबसे न्यूनतम अवयव S का उच्चक कहलाता है। $\alpha = \sup S$
  अथवा
- एक संख्या $\alpha \in F$, समुच्चय $S \subset F$ का एक उच्चक कहलाता है, यदि यह निम्न दो प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है:
  (i) $x \leq \alpha \quad \forall x \in S$,
  (ii) यदि $x \leq v \;\; \forall x \in$ S, तब $\alpha \leq v$.
  अथवा
- मानलो कोई अरिक्त समुच्चय $S \subset F$ उपरि परिबद्ध है, तब एक संख्या $\alpha \in F, S$ का उच्चक (supremum or l.u.b.) होगी, यदि और केवल यदि
  (i) $x \leq \alpha \quad \forall x \in$ S
  (ii) प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए, $\exists$ एक अवयव $x \in$ S इस प्रकार है कि $x > \alpha - \varepsilon$.

(c) निम्न परिबन्ध -

- क्षेत्र F का अवयव k, F के अरिक्त उपसमूच्चय S का निम्न परिबन्ध कहलाता है यदि S का प्रत्येक अवयव k से अधिक या बराबर है ।
  $\mathrm{x} \geq \mathrm{k} \quad \forall x \in S, \quad \mathrm{k} \in \mathrm{F}$
  तथा समुच्चय S नीचे से परिबद्ध कहलाता है।
  (i) यदि इस प्रतिबंध का पालन करने वाले अवयव का अस्तित्व नहीं है, तो S नीचे से अपरिबद्ध कहलाता है।
  (ii) यदि k समुच्चय S का निम्न परिबन्ध हो तो k से छोटी सभी संख्याएँ इसकी निम्न परिबन्ध होगी इस प्रकार एक समुच्चय के लिए निम्न परिबन्धो का समुच्चय अपरिमित होगा।
  (iii) समुच्चय S के निम्न परिबंध का समुच्चय S का अवयव होना आवश्यक नहीं है। किन्तु यह क्षेत्र F का अवयव होता है।

(d) उच्चतम निम्न परिबन्ध या निम्नक -

- नीचे से परिबद्ध समुच्चय S के निम्न परिबन्धो के समूच्चय का उच्चतम अवयव β, S का निम्नक कहलाता है।
  $\beta = \mathrm{Inf}S$

अथवा

- एक संख्या $\beta \in F$, समुच्चय $S \subset F$ का एक निम्नक (infimum or g.l.b.) कहलाती है, यदि यह निम्नलिखित दो प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है:

(i) $\beta \le x \quad \forall x \in S$

(ii) यदि $t \le x \ \forall x \in S$, तब $\beta \ge t$ अर्थात् $t \le \beta$

अथवा

- यदि एक अरिक्त समुच्चय $S \subset F$ निम्न परिबद्ध है, तब एक संख्या $\beta \in F, S$ का निम्नक होगी यदि और केवल यदि

(i) $\beta \le x \quad \forall x \in S$ तथा

(ii) प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए, $\exists x \in S$ इस प्रकार है कि $x < \beta + \varepsilon$.

(e) परिबद्ध समुच्चय–

- क्रमित क्षेत्र F का अरिक्त समुच्चय S परिबद्ध कहलाता है। यदि S के निम्न तथा उपरि दोनो परिबन्ध F में विघमान हो अर्थात $\exists k, K \in F$ ताकि $k \le x \le K \quad \forall x \in S$

परिबन्ध के गुणधर्म –

- प्रत्येक अपरिमित समुच्चय का अपरिबद्ध होना अनिवार्य नहीं है।
- किसी समुच्चय का उच्चक और निम्नक उस समुच्चय का अवयव होना आवश्यक नहीं है।
- निम्नक, समुच्चय का निम्नतम अवयव होना अनिवार्य नहीं है, लेकिन समुच्चय का निम्नतम अवयव, निम्नक हो सकता है।
- उच्चक, समुच्चय का उच्चतम अवयव होना अनिवार्य नहीं है, लेकिन समुच्चय का उच्चतम अवयव, उच्चक हो सकता है।
- अपरिबद्ध समुच्चय के उपसमुच्चय का अपरिबद्ध होना भी अनिवार्य नहीं है।
- परिमित समुच्चय हमेशा परिबद्ध होता है, जिसमें उच्चतम अवयव उच्चक और निम्नतम अवयव निम्नक होता है।
- प्रत्येक परिमित समुच्चय में (उपरि और निम्न) दोनों प्रकार के परिबन्ध उपस्थित होते हैं।
- अपरिमित समुच्चय के परिबन्ध का होना या न होना आवश्यक नहीं है।
- किसी परिबद्ध उपसमुच्चय के उपरि परिबन्ध और निम्न परिबन्ध की संख्या अनन्त होती है, लेकिन इसके उच्चक और निम्नक की स्थिति भिन्न हो सकती है।

उदाहरण-

(i) प्राकृत संख्याओं का समुच्चय

$N = \{1,2,3, \ldots..\} \subset R$

- नीचे से परिबद्ध है तथा निम्नक $\text{Inf}(N) = 1 \in N$
- किन्तु N ऊपर से अपरिबद्ध अतः उच्चक विद्यमान नही

(ii) पूर्ण संख्याओं का समुच्चय

$W = \{0,1,2,3, \ldots \ldots..\} \subset R$

- नीचे से परिबद्ध तथा निम्नक $\text{Inf}(W) = 0 \in W$

(iii) धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

$R^+ = \{x \mid x > 0\} = (0, \infty)$

नीचे से परिबद्ध तथा निम्नक $\text{Inf}(R^+) = 0 \notin R^+$

किन्तु R^+ऊपर से अपरिबद्ध अतः उच्चक विधमान नही

(iv) $\boldsymbol{S = \left\{\frac{1}{n} \middle| \, n \in N\right\}}$

$S = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \ldots . \ldots\right. \subseteq R$

निम्नक $\text{Inf}(S) = 0 \notin S$

उच्चक $\text{Sup}(S) = 1 \in S$

अन्तराल (Intervals)

अन्तराल दो प्रकार के होते है-

(1) परिमित अन्तराल

(2) अपरिमित अन्तराल

(1) परिमित अन्तराल -

- माना $a, b \in R$ तथा $a < b$ हो तो

(i) समुच्चय $A = \{x \mid x \in R, a \le x \le b\}$ संवृत अन्तराल कहलाता है।

- इस $[a, b]$ से प्रदर्शित करते है।
- $A = \{x: a \le x \le b\} = [a, b]$ संवृत अन्तराल

(ii) समुच्चय $B = \{x \mid x \in R; a < x < b\}$ खुला अन्तराल अथवा विवृत अन्तराल कहलाता है इसे (a, b) अथवा $]a, b[$ से प्रदर्शित करते है।

- $B = \{x: a < x < b\} = (a, b)$ विवृत अन्तराल

(iii) समुच्चय $\{x \mid x \in R; a \le x < b\}$ वाम अर्ध संवृत अथवा दक्षिण अर्ध विवृत अन्तराल कहलाता है इसे $[a, b)$ अथवा $[a, b[$ से प्रदर्शित करते है।

- $C = \{x: a \le x < b\} = [a, b)$ अर्धसवृंत अन्तराल

(iv) समुच्चय $\{x \mid x \in R; a < x \le b\}$ दक्षिण अर्ध संवृत अन्तराल अथवा वाम अर्धविवृत अन्तराल कहलाता है इसे $(a, b]$ अथवा $]a, b]$ से प्रदर्शित करते है।

- $D = \{x: a < x \le b\} = (a, b]$ अर्धसवृत अन्तराल
- उपरोक्त चारों अन्तरालो की लम्बाई $= (b - a)$ (परिमित)

Note- यदि $a = b$ हो तो

(i) विवृत अन्तराल $(a, a) = \phi$ (रिक्त समुच्चय)

(ii) संवृत अन्तराल $[a, a] = \{a\}$ (एकल समुच्चय)

(iii) यदि $\{I, I_2, - - - I_n\}$ सवृँत अन्तरालो का समुच्चय है तथा $I_{n-1} \subset I_n, \ n \in N$ हो तो $\cap_{n=1}^{\infty} I_n \ne \phi$

2. अपरिमित अन्तराल

- माना $a \in R$ हो तो

(i) समुच्चय $\{x \mid x \in R; x \ge a\}$ दक्षिण संवृत किरण कहलाता है।

- इसे $[a, \infty)$ से प्रदर्शित करते है।
- $[a, \infty) = \{x: x \ge a\}$ संवृत किरण

(ii) समुच्चय $\{x \mid x \in R; x < a\}$ वाम विवृत किरण कहलाता है।
- इसे $(-\infty, a)$ से प्रदर्शित करते है।
- $(-\infty, a) = \{x: x < a\}$ विवृत किरण

(iii) समुच्चय $\{x \mid x \in R: x \le a\}$ वाम संवृत किरण कहलाता है।
- इसे $(-\infty, a]$ से प्रदर्शित करते है।
- $(-\infty, a] = \{x: x \le a\}$ संवृत किरण

(iv) समुच्चय $\{x \mid x \in R; x > a\}$ दक्षिण विवृत किरण कहलाता है।
- इसे (a, ∞) से प्रदर्शित करते हे।
- $(a, \infty) = \{x: a < x\}$ विवृत किरण

(v) समुच्चय $\{x \mid x \in R\}$ भी एक अन्तराल को प्रदर्शित करता है जिसके सीमा बिन्दु नहीं होते है यह वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को प्रदर्शित करता है।
- इसे $(-\infty, \infty)$ अथवा ' R ' से प्रदर्शित करते है।
- $(-\infty, \infty) = R$ वास्तविक संख्याँ अन्तराल
- उपरोक्त सभी अन्तरालों की लम्बाई अनन्त मानी जाती है।

Note-

1. प्रत्येक अन्तराल अपरिमित समुच्चय होता है किन्तु प्रत्येक अपरिमित समुच्चय का अन्तराल होना आवश्यक नहीं जैसे–
- N एक अपरिमित समुच्चय है अन्तराल नहीं
- Z एक अपरिमित समुच्चय है अन्तराल नहीं
- Q एक अपरिमित समुच्चय है अन्तराल नहीं
- $R-Q$ एक अपरिमित समुच्चय है अन्तराल नहीं
- ϕ एक शून्य लम्बाई का अन्तराल है
- R एक अपरिमित अन्तराल है

2. एक परिमित अन्तराल की लम्बाई परिमित होती है किन्तु यह सदैव अपरिमित समुच्चय होता है
3. किरण सदैव अपरिमित अन्तराल को प्रदर्शित करती है।

वास्तविक संख्या का प्रतिवेश (Neighbourhood (nbd) of a real Number)

- किसी वास्तविक संख्या $a \in R$ का प्रतिवेश $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ एक अन्तराल को प्रदर्शित करता है। जो कि एक अपरिमित समुच्चय है तथा $a-\varepsilon$ से $a+\varepsilon$ के मध्य स्थित प्रत्येक वास्तविक संख्या इसका अवयव होती है।
- जैसे $a = 2$ तथा $\delta = 0.5$ हो तो अन्तराल $(1.5, 2.5)$ संख्या 2 का प्रतिवेश समुच्चय होगा

यदि $x \in N_8(a) \Leftrightarrow x \in (a-\delta, a+\delta)$
$\Leftrightarrow a-\delta < x < a+\delta$
$\Leftrightarrow |x-a| < \delta$

- वास्तविक संख्याओं के समुच्चय ' R ' का उपसमुच्चय S किसी बिन्दु $a \in R$ का प्रतिवेश होगा यदि एक धनात्मक संख्या $\delta > 0$ का अस्तित्व इस प्रकार हो ताकि $(a-\delta, a+\delta) \subset S$

अथवा

- $a \in R$ का δ प्रतिवेश उन वास्तविक संख्याँओं x का समुच्चय है जो कि $|x-a| < \delta$ को सन्तुष्ट करते है। अर्थात
$N_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta) = \{x \in R \mid |x-a| < \delta\}$
- रिक्त समुच्चय ϕ इसके प्रत्येक बिन्दु का प्रतिवेश होता है।
- कोई समुच्चय S, समुच्चय R-S के किसी भी बिन्दु का प्रतिवेश नहीं हो सकता है।
- बिन्दु $a \in R$ के प्रतिवेश का प्रत्येक अधी समुच्चय (Superset) भी बिन्दु $a \in R$ का प्रतिवेश होता है।
- यदि किसी बिन्दु के दो प्रतिवेश समुच्चय A तथा B हो तो $A \cup B$ भी इस बिन्दु का प्रतिवेश समुच्चय होगा।
- a को अर्न्तविष्ट करने वाला प्रत्येक विवृत अन्तराल a का प्रतिवेश कहलाता है।
- वास्तविक संख्या $a \in R$ का प्रतिवेश वास्तविक संख्याओं का समुच्चय होता है क्योंकि $a \in (a-\delta, a+\delta) \subset R$ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय इसके प्रत्येक बिन्दु का प्रतिवेश होता है।
- $a \in$ N का प्रतिवेश N सम्भव नहीं है
क्योंकि $a \in (a-\delta, a+\delta) \not\subset N$
- $a \in Q$ का प्रतिवेश Q सम्भव नहीं है
क्योंकि $a \in (a-\delta, a+\delta) \not\subset Q$
[$\because$ दो परिमेय संख्याओं के मध्य अनन्त अपरिमेय संख्याएँ भी होती है। जोकि Q का अवयव नहीं है।]
- $a \in Z$ का प्रतिवेश Z सम्भव नहीं है
क्योंकि $a \in (a-\delta, a+\delta) \not\subset Z$
- कोई भी अरिक्त परिमित समुच्चय इसके किसी भी बिन्दु का प्रतिवेश नहीं होता है।
- यदि किसी बिन्दु $x \in R$ के दो प्रतिवेश A तथा B हो तो $A \cap B$ भी इस बिन्दु का प्रतिवेश होगा।
- कोई विवृत अन्तराल (a, b) इसके प्रत्येक बिन्दु का प्रतिवेश होता है।
- कोई संवृत अन्तराल $[a, b]$ इसके सीमा बिन्दु a तथा b को छोड़कर शेष सभी बिन्दुओं का प्रतिवेश होता है।

आन्तरिक बिन्दु -

- बिन्दु $a \in$ S, समुच्चय $S \subset R$ का आन्तरिक बिन्दु कहलाता है यदि S, a का प्रतिवेश (nbd of a) हो
$\exists \epsilon > 0 \quad \Rightarrow (a-\epsilon, a+\epsilon) \subset S$

(1) विवृत अन्तराल (a, b) का प्रत्येक बिन्दु इस अन्तराल का आन्तरिक बिन्दु कहलाता है।
- $S = (a, b) \Rightarrow S^\circ = S$

(2) संवृत अन्तराल $[a, b]$ का प्रत्येक बिन्दु (a और b को छोड़कर शेष सभी बिन्दु) इस अन्तराल को आन्तरिक बिन्दु कहलाता है।
- $S = [a, b] \Rightarrow S^\circ = (a, b)$

(3) अर्धसंवृत अन्तराल [a, b) का प्रत्येक बिन्दु (a को छोड़कर) इस अन्तराल का आन्तरिक बिन्दु कहलाता है।

- $S = [a, b) \Rightarrow S^\circ = (a, b)$

(4) अर्ध विवृत अन्तराल $(a, b]$ का प्रत्येक बिन्दु (b को छोड़कर) इस अन्तराल का आन्तरिक बिन्दु कहलाता है।

- $S = (a, b] \Rightarrow S^\circ = (a, b)$

(5) रिक्त समुच्चय का प्रत्येक बिन्दु इसका आन्तरिक बिन्दु कहलाता है।

- $S = \phi \Rightarrow S^\circ = \phi$

(6) प्रत्येक अरिक्त परिमित समुच्चय का कोई आन्तरिक बिन्दु नहीं होता है। S अरिक्त परिमित समुचय हो तो $S^\circ = \phi$

निरपेक्ष मान (Absolute Value)

- $x \in$ R का निरपेक्ष मान अथवा मापांक

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{यदि } x \geq 0 \\ -x, & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

1. त्रिविकल्पता नियम से, निम्नलिखित कथनों में से एक और केवल एक कथन ही सत्य है:

(i) $x > 0$

(ii) $x = 0$

(iii) $x < 0$.

यदि $|x| = 0$, तब $x = 0$

2. प्रत्येक $x \in$ R के लिये

(a) $|x| \geq 0$.

(b) $x \leq |x|$ तथा $-x \leq |x|$.

(c) $|x| = |-x|$.

3. यदि $x, y, z \in R$ तो.

(a) $|x - y| = |y - x|$.

(b) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(c) $|x + z| \leq |x - y| + |y - z|$.

(d) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

यदि $x_1, x_2, \ldots, x_n \in$ R, तो

$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$

4. यदि $x, y \in$ R, तब

(i) $|x|^2 = x^2 = |-x|^2$.

(ii) $|xy| = |x| \cdot |y|$

(iii) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, जब भी $y \neq 0$.

5. यदि $\varepsilon > 0$ हो तो $|a - b| \leq \varepsilon$ यदि और केवल यदि $b - \varepsilon \leq a \leq b + \varepsilon$.

(a) यदि $\varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$.

(b) $-|x| \leq x \leq |x| \quad \forall x \in$ R.

उदाहरण-

- **x के वे मान ज्ञात कीजिये जो निम्न असमिका को सन्तुष्ट करते हैं:**

$|2x + 3| < 6$

व्याख्या:-

$|2x + 3| < 6$

$\Leftrightarrow -6 < 2x + 3 < 6$

$\Leftrightarrow -9 < 2x < 3$

$\Leftrightarrow -\frac{9}{2} < x < \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \left(x \in R: -\frac{9}{2} < x < \frac{3}{2}\right)$

Note:-

1. प्रत्येक $x \in$ R, के लिए

(a) $|x| = \sqrt{x^2}$

(b) $|x^2| = x^2$

2. यदि $x \neq 0 \in$ R तो $|x| \neq 0$.

3. यदि $x, y \in$ R, $|x + y| = |x| + |y|$, यदि और केवल यदि $xy \geq 0$

वास्ततिक संख्याओ के समूच्चय के मुख्य उपसमुच्चय

(1) प्राकृत संख्याएँ -

N $= \{1,2,3 \ldots \ldots \ldots\}$, N $\subset$ R

(2) पूर्णांक –

Z $= \{\ldots \ldots .3, -1,0,1,2,3 \ldots \ldots\}$. N $\subset$ Z $\subset$ R

(3) परिमेय संख्याँ -

$Q = \left\{\frac{p}{q} \middle| \, p, q \in Z, q \neq 0\right\}$

N $\subset$ Z $\subset$ Q $\subset$ R

(4) अपरिमेय संख्या -

- जो वास्तविक संख्या परिमेय नही हो तो वह अपरिमेय संख्या कहलाती है।
- अपरिमेय संख्याओ के समुच्चय (R − Q) से प्रदर्शित करते है।

(i) परिमेय संख्याओ का समुच्चय Q एक क्रमित क्षेत्र है कि पूर्ण क्रमिक क्षेत्र नही

(ii) x, y $\in$ R^+ हो तो n $\in$ N इस प्रकार होगा nx $>$ y

(iii) $\forall x \in R$ $\exists$n $\in$ N ताकि $n > x$

(iv) दो भिन्न वास्तविक संख्याओ के मध्य अनन्त परिमेय संख्याएँ विधमान होती है।

- दो भिन्न वास्तविक सखँयाओ के मध्य अनन्त अपरिमेय संख्याए विद्यमान होती है।

विवृत समुच्चय (Open set)

- यदि किसी समुच्चय $S \subset R$ के प्रत्येक आन्तरिक बिन्दुओं का समुच्चय S°, स्वयं S हो ($S^\circ = S$) तो S को विवृत समुच्चय कहते है।

अथवा

- समुच्चय $S \subset R$ के प्रत्येक बिन्दु $a \in S$ का प्रतिवेश समुच्चय S में अन्तर्विष्ट हो तो S को विवृत्त समुच्चय कहते है।
$\forall a \in S \quad \exists \epsilon < 0 \qquad \Rightarrow (a-\epsilon, a+\epsilon) \subset S$
- कोई समुच्चय विवृत समुच्चय कहलाता है। यदि वह अपने प्रत्येक बिन्दू का प्रतिवेश हो।

Note: -

1. एकल समुच्चय विवृत समुच्चय नहीं होते हैं।
2. हर विवृत अंतराल (a,b) एक विवृत समुच्चय है।
3. वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R एक विवृत समुच्चय है।
4. रिक्त समुच्चय भी एक विवृत समुच्चय है।
5. दो या दो से अधिक विवृत समुच्चयों का संघ-समुच्चय एक विवृत समुच्चय होता है।
6. N, Z और Q विवृत समुच्चय नहीं होते हैं।
7. संवृत अंतराल [a,b] या अर्धसंवृत अंतराल [a,b) या (a,b] विवृत समुच्चय नहीं होते हैं।
8. धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $R^+=(0,\infty)$ एक विवृत समुच्चय है।
9. सीमित संख्या में विवृत समुच्चयों का सर्वनिष्ठ एक विवृत समुच्चय होता है, लेकिन अपरिमित संख्या में विवृत समुच्चयों का सर्वनिष्ठ विवृत समुच्चय होना आवश्यक नहीं है।

समुच्चय का सीमा बिन्दु (Limit Point of a set)

- एक वास्तविक संख्या α, समुच्चय $S \subset R$ का सीमा बिन्दु तब कहलाती है जब α के किसी भी प्रतिवेश में α के अलावा S का कम से कम एक बिन्दु अवश्य उपस्थित हो।
या
- प्रत्येक $\epsilon > 0$ के लिए यदि विवृत अन्तराल $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ में α के अतिरिक्त S का कम से कम एक बिन्दु मौजूद है, तो α को S का सीमा बिन्दु माना जाएगा।
या
- एक वास्तविक संख्या α, समुच्चय $S \subset R$ का सीमा बिन्दु होगी यदि $\{(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap A\}-\{\alpha\} \neq \phi$, अर्थात् α के प्रतिवेश में A के अन्य बिन्दुओं की उपस्थिति हो।
- प्रत्येक वास्तविक संख्याँ, परिमेय संख्याओ के समुच्चय Q का सीमा बिन्दू होता है।
- Q का प्रत्येक बिन्दू Q का सीमा बिन्दू है।
- सीमीत समुच्चय का सीमा बिन्दू होता है।
- समुच्य A का सीमा बिन्दू A में होना आवश्यक नही है।
- किसी भी समुचय के अनन्त सीमा बिन्दू हो सकते है।
- $N = \{1,2,3, \dots \dots \subset C$ का कोई सीमा बिन्दु नहीं।
- वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R का प्रत्येक बिन्दु, R का सीमा बिन्दु होता है।
- सीमा बिन्दुओं की संख्या शून्य अथवा अशून्य परिमित अथवा अपरिमित सम्भव है।
- रिक्त समुच्चय (Null Set) का कोई सीमा बिन्दु नहीं होता।
- अन्तराल (a,b) अथवा $[a,b]$ अथवा $[a,b)$ अथवा $(a,b]$ का प्रत्येक बिन्दु इनका सीमा बिन्दु होता है।
- $a \in R$ समुच्चय $S \subset R$ का सीमा बिन्दु नहीं होगा यदि ' a ' के किसी ऐसे प्रतिवेश (ndb) का अस्तित्व हो जिसका कोई भी अवयव ' S ' का अवयव नहीं हो
- प्रत्येक आन्तरिक बिन्दु (interior point), सीमा बिन्दु (limit point) होता है। किन्तु प्रत्येक सीमा बिन्दु का आन्तरिक बिन्दु होना आवश्यक नहीं
- यदि समुच्चय $S \subset R$ के लिए $\text{Sup}(S) \notin S$ हो तो भी $\text{Sup}(S)$ समुच्चय S का सीमा बिन्दु होगा।
जैसे- $S = (-\infty, a) \subset R$ उपर से परिबद्ध है तथा $\text{Sup}(S) = a \notin S$ अतः a, S का सीमा बिन्दु है।
- यदि समुच्चय $S \subset R$ के लिए $\text{Inf}(S) \notin S$ हो तो भी $\text{Inf}(S)$ समुच्चय S का सीमा बिन्दु होगा
जैसे- $S = (a, \infty) \subset R$ नीचे से परिबद्ध है तथा $\text{Inf}(S) = a \notin S$ अतः a, S का सींमा बिन्दु
- पूर्णांकों को समुच्चय Z का कोई सीमा बिन्दु नहीं होता।
- प्रत्येक असीमीत परिवद्ध समुच्चय का कम से कम एक सीमा बिन्दू होता है। (बॉलजनो वाइस्ट्रास प्रमेय)

संवृत समुच्चय (Closed set)

- वास्तविक संख्याओ का उपसमुच्चय E संवृत समुच्यय कहलाता है यदि $R-E$ विवृत समुच्चय हो अर्थात E के सभी सीमा बिन्दू E में विद्यमान हो तो E संवृत समुच्चय कहलाता है।
- सवृंत अन्तराल $[a,b]$ संवृत समुच्चय है ।
- पूर्णांको का समुच्चय Z संवृत समुच्चय है ।
- सवृंत समुच्चयो का संघ एक संवृत समुच्चय होता है।
- सवृंत समुच्चयो का सर्वनिष्ठ एक संवृत समुच्चय होता है।
- R तथा ϕ संवृत समुच्चय होते है।
- अर्ध विवृत अन्तराल $[a,b)$ या $[a,b)$ संवृत समुच्चय नहीं है।
- समुच्चय A विवृत समुच्चय होगा यदि और केवल यदि R A संवृत समुच्चय है।

Note: -

(i) R तथा ϕ केवल ये दो ही ऐसे समुच्चय है जो कि सवृंत भी हो तथा विवृत भी हो।

(ii) अर्द्ध विवृत अन्तराल $[a,b)$ तथा $(a,b]$ न तो सवृंत समुच्चय है, नही विवृत समुच्चय

(iii) परिमेय सखँयाओ का समुच्चय न तो विवृत समुच्चय है ना ही सवृंत समुच्चय

वास्तविक अनुक्रम (Real Sequence)

अनुक्रम (Sequence)-

– प्राकृत संख्यॉओं के समुच्चय N से अरिक्त समुच्चय A पर परिभाषित फलन एक अनुक्रम (Sequence) कहलाता है।
फलन $f: \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{A}$ एक अनुक्रम है।
अर्थात् अनुक्रम समुच्चय A में परिभाषित सम्बन्ध होता है जो कि प्रत्येक प्राकृत संख्याँ को A के अद्वितीय अवयव से सम्बन्धित करता है।
विशिष्ट स्थिति: - यदि A, वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R का उपसमुच्चय $(\mathrm{A} \subset \mathrm{R})$ हो तो फलन $f: \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{R}$ वास्तविक अनुक्रम (Real sequence) कहलाता है।

अनुक्रम का निरूपण -

– यदि $x: \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{R}$ एक वास्तविक अनुक्रम हो तो $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$ का प्रतिबिम्ब $x(n) = x_n \in \mathrm{R}$ वास्तविक अनुक्रम का n वाँ पद कहलाता है। अतः अनुक्रम
$x = \{x(1), x(2), \ldots \ldots \ldots x(n)\}$
$x = \{x_1, x_2, \ldots \ldots . x_n\}$
अथवा $\{x_n\}$ अथवा $< x_n >$ अथवा
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ द्वारा निरूपित करते है।
– अनुक्रम के विभिन्न क्रमागत पदो का समुच्चय अनुक्रम का परिसर कहलाता है।

Note: -
(i) प्रत्येक अनुक्रम का प्रान्त सदैव प्राकृत संख्याँओ का समुच्चय होता है।
(ii) चुंकि N में अनन्त पद होते है अतः प्रत्येक अनुक्रम मे अनन्त पद होते है।
(iii) अनुक्रम का परास (Range) परिमित हो सकता है।
जैसे अनुक्रम $x_n = (-1)^n$ का परिसर $= \{-1,1\}$
(iv) यदि प्रत्येक $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$ के लिए $x_n = \mathrm{c} \in \mathrm{R}$ हो तो $\{x_n\}$ को अचर अनुक्रम (constant sequence) कहते है।
$\{x_n\} = \{\mathrm{c}, \mathrm{c}, \mathrm{c}, \ldots \ldots \ldots \ldots\}$ अचर अनुक्रम है।
जिसका परिसर $= \{\mathrm{c}\}$
(v) यदि प्रत्येक $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$ के लिए $x_n = \mathrm{n} \in \mathrm{N}$ हो तो $\{x_n\}$ को तत्समक अनुक्रम (Identity Sequence) कहलाता है।
तत्समक अनुक्रम $= \{1,2,3, \ldots.\}$
तत्समक अनुक्रम का प्रान्त $= \mathrm{N}$
तत्समक अनुक्रम का परिसर $= \mathrm{N}$
(vi) यदि अनुक्रम के m वे तथा n वे पद $(x_m = x_n)$ एक समान हो तो भी वे भिन्न पद माने जाते है। अर्थात अनुक्रम के भिन्न-भिन्न स्थिति के पद भिन्न भिन्न माने जाते है। x चाहे मान में एक समान हो।
$x_n = \{-1,1,-1,1,-1, \ldots \ldots\}$
(vii) दो अनुक्रम $\{x_n\}$ तथा $\{y_n\}$ समान अनुक्रम कहलाते है यदि प्रत्येक $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$ के लिए $x_n = y_n$

अनुक्रम की परिवद्धता (Boundedness of a sequence)

1. परिबद्ध अनुक्रम -

– गणित में, किसी अनुक्रम (a_n) को परिबद्ध अनुक्रम (Bounded Sequence) कहा जाता है यदि उस अनुक्रम के सभी पद किसी नियत संख्या सीमा के भीतर होते हैं।
– अनुक्रम $\{x_n\}$ परिबद्ध अनुक्रम कहलाता है यदि यह ऊपर तथा नीचे दोनों ओर से परिबद्ध हो,
अर्थात्
– यदि दो वास्तविक संख्याँए k तथा K इस प्रकार हो ताकि प्रत्येक $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$ के लिए $k \leq x_n \leq \mathrm{K}$ हो तो अनुक्रम परिबद्ध अनुक्रम (Bounded Sequence) कहलाता है।
– इसका अर्थ यह है कि अनुक्रम के सभी पद एक निश्चित सीमा के भीतर रहते हैं और अनंत की ओर अनियंत्रित रूप से नहीं बढ़ते।

परिबद्ध अनुक्रम के प्रकार

(a) ऊपरी परिबन्ध -

– एक अनुक्रम $\{x_n\}$ ऊपर से परिबद्ध कहलाता है यदि एक वास्तविक संख्याँ K इस प्रकार हो ताकि प्रत्येक $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$ के लिए $x_n \leq K$
अर्थात अनुक्रम का प्रत्येक पद एक वास्तविक संख्याँ K के बराबर अथवा छोटा हो तो संख्या K, अनुक्रम $\{x_n\}$ का ऊपरी परिबन्ध कहलाता है।

Note: -
(i) यदि K, अनुक्रम $\{x_n\}$ का ऊपरी परिबन्ध हो तो K से बड़ी प्रत्येक वास्तविक राशि, अनुक्रम $\{x_n\}$ का ऊपरी परिबन्ध होगा।
(ii) यदि अनुक्रम $\{x_n\}$ का ऊपरी परिबन्ध का अस्तित्व हो तो अनुक्रम $\{x_n\}$ का अनन्त ऊपरी परिबन्ध होगे।
(iii) ऊपरी परिबन्ध, अनुक्रम का अवयव होना आवश्यक नही
(iv) यदि अनुक्रम $\{x_n\}$ का ऊपरी परिबन्ध का अस्तित्व न हो तो अनुक्रम ऊपर से अपरिबद्ध (unbounded above) कहलाता है।

(b) निम्न परिबन्ध -

– अनुक्रम $\{x_n\}$ नीचे से परिबद्ध (bounded blow) कहलाता है। यदि एक वास्तविक संख्याँ k इस प्रकार हो ताकि प्रत्येक $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$ के लिए $x_n \geq k$
अर्थात्
अनुक्रम का प्रत्येक पद वास्तविक राशि k के बराबर अथवा इससे बड़ा हो तथा k अनुक्रम $\{x_n\}$ का निम्न परिबच्ध (lower bound) कहलाता है।

Note: -

(i) यदि k, अनुक्रम $\{x_n\}$ का निम्न परिबन्ध हो तो k से छोटी प्रत्येक वास्तविक राशि, अनुक्रम $\{x_n\}$ का निम्न परिबन्ध होगा।

(ii) यदि अनुक्रम $\{x_n\}$ का निम्न परिबन्ध का अस्तित्व न हो तो अनुक्रम नीचे से अपरिबद्ध कहलाता है।

(iii) निम्न परिबन्ध, अनुक्रम का अवयव होना आवश्यक नही

(iv) यदि अनुक्रम $\{x_n\}$ का निम्न परिबन्ध का अस्तित्व हो तो अनुक्रम $\{x_n\}$ का अनन्त निम्न परिबन्ध होगे।

2. अपरिबद्ध अनुक्रम -

– यदि किसी अनुक्रम $\{a_n\}$ के पद किसी निश्चित सीमा के भीतर नहीं रहते, अर्थात् वे अनंत की ओर अनियंत्रित रूप से बढ़ते या घटते हैं, तो उसे अपरिबद्ध अनुक्रम (Unbounded Sequence) कहा जाता है।

– यदि अनुक्रम या तो केवल ऊपर से या केवल नीचे से या दोनों ओर से परिबद्ध ना हो तो इन्हें अपरिबद्ध अनुक्रम (Unbounded sequence) कहते है।

– किसी अनुक्रम $\{a_n\}$ को अपरिबद्ध कहा जाता है यदि उसके लिए कोई ऐसी सीमा M>0 नहीं मिलती जो सभी पदों को नियंत्रित कर सके।

– यानी, प्रत्येक M>0 के लिए कोई ऐसा n मौजूद होगा जिससे: $|a_n|>M$

– इसका अर्थ यह है कि अनुक्रम के पद निरंतर बड़े होते जाते हैं या नकारात्मक दिशा में अत्यधिक छोटे होते जाते हैं, जिससे वे किसी नियत सीमा के भीतर नहीं रहते।

अपरिबद्ध अनुक्रम के प्रकार

– अपरिबद्ध अनुक्रम को दो भागों में बाँटा जा सकता है:

(i) धनात्मक अपरिबद्ध अनुक्रम -

– यदि अनुक्रम के सभी पद निरंतर बढ़ते जाएँ और कोई ऊपरी सीमा न हो, तो वह धनात्मक अपरिबद्ध होता है।

(ii) ऋणात्मक अपरिबद्ध अनुक्रम -

– यदि अनुक्रम के सभी पद निरंतर छोटे होते जाएँ (अर्थात्, नकारात्मक अनंत की ओर बढ़ें), तो वह ऋणात्मक अपरिबद्ध होता है।

अनुक्रम का निम्नक -

– यदि अनुक्रम $\{x_n\}$ परिबद्ध हो तो अनुक्रम के निम्न परिबन्धों का महत्तम (अधिकतम) मान अनुक्रम का निम्नक कहलाता है।

g.l.b. $= \text{Inf}\{x_n\}$

उदाहरण: -

(1) अनुक्रम $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ परिबद्ध अनुक्रम है।

– जिसका उच्चक 1 तथा निम्नक 0 है।

(2) अनुक्रम $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ परिबद्ध अनुक्रम है।

– जिसका उच्चक $\frac{1}{2}$ तथा निम्नक 0 है।

(3) अनुक्रम $\{n^2\}$ नीचे से परिबद्ध है।

– जिसका निम्नक 1 तथा ऊपर से अपरिबद्ध अनुक्रम है।

Note: - अनुक्रम का निम्नक तथा उच्चक अनुक्रम का अवयव होना आवश्यक नहीं है।

एक दिष्ट अनुक्रम -

– अनुक्रम $\{x_n\}$ एक दिष्ट अनुक्रम कहलाता है यदि इसके क्रमागत पद निरन्तर बढ़ते क्रम अथवा निरन्तर घटते क्रम में उपस्थित हो।

एक दिष्ट ह्रासमान अनुक्रम -

– अनुक्रम $\{x_n\}$ में यदि $x_{n+1} \le x_n \forall n > N$

अर्थात् $x_1 \ge x_2 \ge x_3 \dots\dots\dots.. \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots \dots$

हो तो अनुक्रम एक दिष्ट ह्वसमान अनुक्रम कहलाता है।

पूनः यदि $x_{n+1} < x_n$ अर्थात् $x_1 > x_2 > x_3 > x_n > x_{n+1} >$ हो तो अनुक्रम निरन्तर ह्रासमान अनुक्रम कहलाता है।

जैसे अनुक्रम $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ निरन्तर ह्वसमान अनुक्रम है।

क्योंकि $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow x_{n+1} < x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

एक दिष्ट वर्धमान अनुक्रम-

– अनुक्रम $\{x_n\}$ में यदि $x_{n+1} \ge x_n \ \forall n > N$

अर्थात् $x_1 \le x_2 \le x_3 \dots\dots\dots.. \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots \dots$

हो तो अनुक्रम एक दिष्ट वर्धमान अनुक्रम (Monotonically increasing sequence) कहलाता है।

पुनः यदि $x_{n+1} > x_n$

अर्थात् $x_1 < x_2 < x_3 \dots\dots\dots < x_n < x_{n+1} < \cdots..$ हो तो अनुक्रम निरन्तर वर्धमान अनुक्रम (strictly increasing sequence) कहलाता है।

जैसे:- अनुक्रम $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ एक दिष्ट वर्धमान अनुक्रम है-

$\because \frac{n+1}{n+2} > \frac{n}{n+1} \Rightarrow x_{n+1} > x_n$

अनुक्रम का सीमा बिन्दु -

– अनुक्रम $\{x_n\}$ का सीमा बिन्दु α वास्तविक संख्या होगी यदि प्रत्येक $\epsilon > 0$ के लिए

$|x_n - \alpha| < \epsilon \qquad \forall n > n_0 \qquad n_0 \in \mathbb{N}$

अथवा

$\alpha - \epsilon < x_n < \alpha + \epsilon \qquad \forall n > n_0 \qquad n_0 \in \mathbb{N}$

अर्थात् α के प्रतिवेश $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ में अनुक्रम के अनन्त पद हो -

उदाहरण:-

1. अनुक्रम $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ का सीमा बिन्दु 0
2. अनुक्रम $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ का सीमा बिन्दु 1
3. अनुक्रम $\{(-1)^n\}$ का सीमा बिन्दु 1 तथा -1
4. अनुक्रम $\left\{\frac{n^2+1}{2n^2+5}\right\}$ का सीमा बिन्दु $\frac{1}{2}$

Note :-

(i) प्रत्येक अनुक्रम का सीमा बिन्दु होना आवश्यक नहीं

(ii) अनुक्रम के एक से अधिक सीमा बिन्दु सम्भव है।

(iii) सीमा बिन्दु अनुक्रम का पद होना आवश्यक नहीं

(iv) प्रत्येक परिबद्ध अनुक्रम का कम से कम एक सीमा बिन्दु होता है। बॉलजनो-वाइस्ट्रास प्रमेय किन्तु इसका विलोम सदैव सत्य नहीं

अनुक्रम की सीमा -

- एक वास्तविक संख्याँ l अनुक्रम $\{x_n\}$ की सीमा कहलाती है यदि किसी दिये गये $\epsilon > 0$ के सापेक्ष $n_0 \in N$
- इस प्रकार विद्यमान हो ताकि

  $|x_n - l| < \epsilon \quad \forall n > n_0$

  $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ अथवा

Note:- अनुक्रम की सीमा, उसकी सीमा बिन्दु भी होती है। किन्तु इसका विलोम सदैव सत्य नही है।

जैसे:- अनुक्रम $\{(-1)^n\}$ की सीमा का अस्तित्व नही है। जबकि इसके दो सीमा बिन्दु -1 तथा +1 है।

अभिसारी अनुक्रम -

- अनुक्रम $\{x_n\}$ अभिसारी कहलाती है यदि अनुक्रम $\{x_n\}$ की सीमा एक परिमित राशी हो।

  अर्थात् अनुक्रम $\{x_n\}$ परिमित राशी l को अभिसूत होती है यदि $\lim_{x\to\infty} x_n = l$ (परिमित संख्याँ)

  अथवा

  $|x_n - l| <\in \forall n > n_0; n_0 \in \mathrm{N}$

अपसारी अनुक्रम -

- अनुक्रम $\{x_n\}$ एक अपसारी अनुक्रम कहलाता है, यदि अनुक्रम $\{x_n\}$ की सीमा (अपरिमित) का अस्तित्व न हो

  अर्थात् $\lim_{x\to\infty} x_n = \infty$ अथवा $-\infty$ अर्थात् प्रत्येक $\mathrm{k} > 0$ के लिए $n_0 \in \mathrm{N}$ इस प्रकार हो ताकि $x_n > k$ अथवा $x_n < -k \quad \forall n > n_0$

दोलनी अनुक्रम -

- वे अनुक्रम जो कि न तो अभिसारी है तथा ना ही अपसारी, दोलनी अनुक्रम कहलाते है।
- दोलनी अनुक्रम परिमित रूप अथवा अपरिमित रूप से दोलन करती है यदि अनुक्रम परिबद्ध अथवा अपरिबद्ध अनुक्रम हो

कुछ विशेष प्रकार के अनुक्रमों के उदाहरण-

1. एकदिष्ट वर्धमान अभिसारी अनुक्रम $= \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$
2. एकदिष्ट वर्धमान अपसारी अनुक्रम $= \{n\}$
3. एकदिष्ट ह्रासमान अभिसारी अनुक्रम $= \left\{\frac{1}{n}\right\}$
4. एकदिष्ट ह्रासमान अपसारी अनुक्रम $= \{-n\}$
5. अनुक्रम $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$ अभिसारी अनुक्रम है।

   जो कि 0 को अभिसृत होती है।

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$ (परिमित)
6. अनुक्रम $\{3^n\}$ अपसारी अनुक्रम है।

   $\lim_{n\to\infty} 3^n = +\infty$
7. अनुक्रम $\{-x^2\}$ अपसारी अनुक्रम है।

   $\lim_{n\to\infty} -x^2 = -\infty$
8. अनुक्रम $\{(-2)^n\}$ अपरिबद्ध दोलनी अनुक्रम है।

   $\lim_{n\to\infty}(-2)^n = \begin{cases} \infty & \text{यदि } n \text{ सम} \\ -\infty & \text{यदि } n \text{ विषम} \end{cases}$
9. अनुक्रम $\{(-1)^n\}$ परिबद्ध दोलनी अनुक्रम है।

   $\lim_{n\to\infty}(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{यदि } n \text{ सम} \\ -1 & \text{यदि } n \text{ विषम} \end{cases}$

कुछ महत्वपूर्ण सीमाएँ :-

1. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
2. $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1,$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$, जब $p > 0$ तथा $p \in \mathbf{R}$
4. $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, जब $|r| < 1$ तथा $r \in \mathbf{R}$
5. $\lim_{n\to\infty} r^{1/n} = 1$, जब $r > 1$ तथा $r \in \mathrm{R}$

अभिसारी अनुक्रम के मुख्य गुणधर्म :-

- अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध अनुक्रम होता है।
- अभिसारी अनुक्रम $\{x_n\}$ की सीमा अद्वितीय (Unique) होती है।
- अनुक्रम $\{x_n\}$ के अभिसरण की आवश्यक तथा पर्याप्त शर्त है कि वह परिबद्ध हो तथा इसकी सीमा अद्वितीय हो
- एक दिष्ट ह्रासमान अनुक्रम के अभिसारी होने का आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि अनुक्रम परिबद्ध हो तथा $\lim_{n\to\infty} x_n = \mathrm{Inf}\{x_n\}$
- एक दिष्ट वर्धमान अनुक्रम के अभिसारी होने का आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि अनुक्रम परिबद्ध हो तथा $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$
- यदि $\{x_n\}$ तथा $\{y_n\}$ दो अभिमारी अनुक्रम है जो कि परिमित l_1 तथा l_2 को अभिसृत होते है तो

  a. $\lim_{n\to\infty}[x_n + y_n] = l_1 + l_2$

  b. $\lim_{n\to\infty}[x_n - y_n] = l_1 - l_2$

  c. $\lim_{n\to\infty}[x_n \cdot y_n] = l_1 \cdot l_2$

  d. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{l_1}{l_2}$

  जहाँ $l_2 \neq 0$ तथा $y_n \neq 0 \quad \forall n > N$

Note: - यदि अभिसारी अनुक्रम $< x_n >$ तथा $< y_n >$ की सीमाएँ क्रमशः l_1 तथा l_2 हैं, तो उनके योग, अन्तर, गुणन तथा भागफल अनुक्रम भी अभिसारी होंगी तथा उनकी सीमाएँ भी उनकी संगत सीमाओं का क्रमशः योग, अन्तर, गुणा तथा भागफल होगी किन्तु विलोम सदैव सत्य नहीं होता है।

जैसे-

1. यदि $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ तथा $\{y_n\} = \{(-1)^n\}$
$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty}[(-1)^n \cdot (-1)^n]$
$= \lim_{n\to\infty}(-1)^{2n} = 1 \quad \forall n \in N$
अतः अनुक्रम $\{x_n \cdot y_n\}$ अभिसारी अनुक्रम है किन्तु $\{x_n\}$ तथा $\{y_n\}$ अभिसारी अनुक्रम नही है।
2. यदि $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ तथा $\{y_n\} = \{(-1)^n\}$
$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = 1 \quad \forall n \in N$
अत: $\left\{\frac{x_n}{yy_n}\right\}$ अभिसारी अनुक्रम हैं किन्तु $\{x_n\}$ तथा $\{y_n\}$ अभिसारी अनुक्रम नही है।
3. यदि $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ तथा $\{y_n\} = \{(-1)^{n+1}\}$
$\mathrm{Lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty}(-1)^n + (-1)^{n+1}$
$\lim_{n\to\infty}(-1)^n[1 + (-1)] = 0 \quad \forall n \in N$
अत: $\{x_n + y_n\}$ अभिसारी अनुक्रम है। किन्तु $\{x_n\}$ तथा $\{y_x\}$ अभिसारी अनुक्रम नही है।
4. यदि $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ तथा $\{y_n\} = \{(-1)^n\}$
$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty}[(-1)^n - (-1)^n] = 0$
(परिमित) $\forall n \in N$
अतः अनुक्रम $\{x_n - y_n\}$ अभिसारी अनुक्रम है किन्तु $\{x_n\}$ तथा $\{y_n\}$ अभिसारी अनुक्रम नही है।

उपानुक्रम (Sub-sequence)-

- माना $\{x_n\}$ एक अनुक्रम है तथा $\{v_n\}$ एक दिष्ट वर्धमान अनुक्रम है अर्थात् $v_1 < v_2 < v_3 < \cdots$ ……….
अनुक्रम $\{x_{v_n}\} = \{x_{v_1}, x_{v_2} \dots \dots x_{v_n}\}$
अनुक्रम $\{x_n\}$ का एक उपानुक्रम कहलाता है।
अथवा
वास्तविक अनुक्रम $x: \mathrm{N} \to \mathrm{R} \quad x = \{x_n\}$ तथा $v: \mathrm{N}$
$\mathrm{N} \quad v = \{v_n\}$ एक दिष्ट वर्धमान
- अनुक्रम हो तो संयुक्त फलन $xov: \mathrm{N} \to \mathrm{R}, \quad x_{0\cup}: x_y,$ अनुक्रम $\{x_n\}$ का उपानुक्रम कहलाता है।

उपानुक्रम के गुणधर्म-

1. यदि अभिसारी अनुक्रम $\{x_n\}$, परिमित राशी l को अभिसृत होती है। तो इसका प्रत्येक उपानुक्रम $\{x_{v_n}\}$ भी ' l ' को अभिसृत होता है । किन्तु इसका प्रतिलोम सदैव सत्य नहीं है।
2. प्रत्येक परिबद्ध अनुक्रम का एक अभिसारी उपानुक्रम होता है। (बालजनो वाइस्ट्रॉस प्रमेय)

मुल या कोशी अनुक्रम -

- अनुक्रम $\{x_n\}$ कोशी अनुक्रम कहलाती है यदि स्वेच्छ $\epsilon > 0$ के संगत घनात्मक पूँर्णांक n_0 विद्यमान हो ताकि
$|x_n - x_m| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$ ताकि $m > n_0$
अथवा
$|x_{n+p} - x_n| < \quad \epsilon \forall n \geq n_0$ तथा $p \in N$
- प्रत्येक कोशी अनुक्रम परिबद्ध (Bounded) होता है।
- एक अनुक्रम अभिसारी अनुक्रम होता है यदि और केवल यदि यह कोशी अनुक्रम हो।
अथवा
अनुक्रम $\langle < x_n >$ के अभिसारी होने की आवश्यक तथा पर्यास्त शर्त यह है कि कितने ही दिए न्यून $\varepsilon > 0$ के संगत ऐसे धन पूर्णांक n_0 तथा p विद्यमान हैं कि :
$x_{n+p} - x_n \ | < \varepsilon, \quad n > n_0, p > 1$
- यदि $\{x_n\}$ एक ऐसी अनुक्रम है कि $x_n \geq 0, \ \forall n \in$ N तथा $\lim x_n = l$, हो तो $l \geq 0$
- यदि $\{x_n\}$ तथा $\{y_n\}$ दो अनुक्रम इस प्रकार के हैं कि:
$x_n < y_n, \quad \forall n \in$ N तथा $\lim x_n = \xi, \lim y_n = \eta$, हो तो $\xi \leqslant \eta$
- यदि $\{x_n\}$ एक इस प्रकार की अनुक्रम हैं कि:
$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \lambda$, जहाँ $|\lambda| = 1$, तो
$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$

Note: - यदि कोशी अनुक्रम का उपानुक्रम l को अभिसृत होता है तो कोशी अनुक्रम भी l को अभिसृत होती है।

कोशी वाली सीमा का प्रथम प्रमेय-

(i) यदि अनुक्रम $\{x_n\}, l$ को अभिसृत होती है तो निम्न प्रकार परिभाषित अनुक्रम $y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ भी l को अभिसृत होती है।
अर्थात $\lim_{n\to\infty} x_n = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = l$

कोशी का सीमा पर द्वितीय प्रमेय-

- यदि (x_n) घनात्मक पदो का अनुक्रम इस प्रकार है ताकि $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ हो तो
$\lim_{n\to\infty}(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots \dots \dots x_n)^{\frac{1}{n}} = l$

(ii) यदि $\langle x_n \rangle$ कोई धनात्मक वास्तविक संख्याओं को अनुक्रम हो, तथा $\lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = l$ (अचर धनात्मक संख्या) हो तो
$\lim(x_n)^{\frac{1}{n}} = l$

Note: - इसका कथन का प्रतिलोम सदेव सत्य नहीं होता
जैसे - अनुक्रम $< 2,3,2,3, \dots >$, के लिये $\lim(x_n)^{\frac{1}{n}} \to 1,$
किन्तु सीमा $\lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ का मान $\frac{2}{3}$ अथवा $\frac{3}{2}$ होगा।

सैण्डविच प्रमेय
Sandwich Theorem

– यदि अनुक्रम a_n तथा b_n दोनों l पर अभिसृत होती है। तथा यदि $a_n < c_n < b_n \forall n \in$ N तथा c अचर है। तो अनुक्रम c_n भी l को अभिसृत होगी।

अर्थात्

$\lim_{n\to\infty} a_n = l, \lim_{n\to\infty} b_n = l$ हो तो $\lim_{n\to\infty} c_n = l$

जहाँ $a_n < c_n < b_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$

– यदि अनुक्रम $\{a_n\}$ तथा $\{b_n\}$ क्रमशः A और B को अभिसृत होते हों तो

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots \ldots \ldots + a_{n-1}b_2 + a_n b_1] = AB$

उदाहरण:-

1. अनुक्रम $\left\{\frac{n^2+1}{n^2}\right\}$ की प्रकृति ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$x_n = \frac{n^2+1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n^2}$

$x_1 = 2, x_2 = \frac{5}{4}, x_3 = \frac{10}{9}$,…………………

$\because x_1 > x_2 > x_3 > \cdots \ldots \ldots \ldots$

अतः अनुक्रम एक दिष्ट ह्रसमान अनुक्रम है।

पूनः $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1$

अतः अनुक्रम 1 की ओर अभिसृत होता है।

2. अनुक्रम $\{(-1)^n\}$ की प्रकृति ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$x_n = (-1)^n$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} -1 & \text{यदि } n \text{ विषम} \\ 1 & \text{यदि } n \text{ सम} \end{cases}$$

अतः अनुक्रम परिबद्ध दोलनी अनुक्रम है।

3. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{n!}\right)^{1/n}$ का मान ज्ञात करो।

व्याख्या: -

मान लीजिए $x_n = \frac{n^n}{n!}$, तथा $x_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\text{अब } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (1)$$

अब $\lim_{n\to\infty} = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

फलतः कोशी वाली सीमा की द्वितीय प्रमेय से,

$\lim_{n\to\infty}(x_n)^{\frac{1}{n}} = e$

या, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{n!}\right)^{1/n} = e$

4. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}{n^n}\right]^{1/n}$ का मान ज्ञात करो।

व्याख्या: -

माना $x_n = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}{n^n} \Rightarrow x_n = \frac{(2n)!}{(n)!(n)^n}$

तथा $x_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)^{n+1}}$

अब $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n!\,n^n}{(2n)!}$

$$= \frac{(2n+1)(2n+2)n^n}{(n+1)^{n+2}} = 4\left[\frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}\right]$$

$$\text{अतः } = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} = 4\left[\frac{1+\frac{1}{2n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]$$

$$= 4\left[\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right] = 4\left[\frac{1}{1.e}\right] = \frac{4}{e}$$

फलतः कोशी वाली सीमा की द्वितीय प्रमेय से,

$\lim_{n\to\infty}(x_n)^{1/n} = \frac{4}{e}$

i.e., $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}{n^n}\right]^{1/n} = \frac{4}{e}$

5. अनुक्रम $\left\{(-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\}$ की प्रकृति ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$x_n = (-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} -1 & \text{यदि } n \text{ विषम} \\ 1 & \text{यदि } n \text{ सम} \end{cases}$$

अतः अनुक्रम परिबद्ध दोलनी अनुक्रम है।

6. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[1 + 2^{1/2} + 3^{1/3} + \cdots . + n^{1/n}\right]$ का मान ज्ञात करो।

व्याख्या: -

माना $x_n = n^{1/n}, \forall n \in$ N तो

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$

फलतः कोशी वाली सीमा की प्रथम प्रमेय से

$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[1 + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{3}} + \cdots + n^{\frac{1}{n}}\right] = 1$

7. अनुक्रम $\left\{\frac{2n+5}{3n+2}\right\}$ की सीमा ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{3n+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+5/n}{3+2/n} = \frac{2}{3}$

8. अनुक्रम $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ की सीमा ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1$

9. अनुक्रम $\left\{\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right\}$ की प्रकृति ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$\because x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}, x_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\because x_1 > x_2 > x_3 \ldots\ldots\ldots$

अतः अनुक्रम एक दिष्ट ह्रासमान अनुक्रम है।

पूनः $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n}}{1+\frac{1}{n}} = 0$

अतः अनुक्रम ' 0 ' की ओर अभिसृत होता है।

10. अनुक्रम $\{x_n\}$ की सीमा ज्ञात करो जहाँ

$x_1 = \frac{1}{2}$ तथा $x_{n+1} = \frac{2x_n+1}{3}$

व्याख्या: -

माना $\lim_{n\to\infty} x_n = l$

अतः $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = l$

$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n+1}{3}$

$l = \frac{2l+1}{3} \Rightarrow 3l = 2l + 1 \Rightarrow l = 1$

11. अनुक्रम $\{x_n\}$ की सीमा ज्ञात करो जहाँ $x_n = 1$ तथा $x_{n+1} = \sqrt{(2 + x_n)}$

व्याख्या: -

$\lim_{n\to\infty} x_n = l$

अतः $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = 1$

$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(2 + x_n)}$

$\Rightarrow l = \sqrt{2 + l}$

$\Rightarrow l^2 - l - 2 = 0$

$\Rightarrow (l - 2)(l + 1) = 0$

$\Rightarrow l = 2$ तथा $l = -1$

किन्तु $x_n > 0$

अतः $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$

12. अनुक्रम $\left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}$ की प्रकृति ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$$x_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$\because x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{4}{3}, x_3 = \frac{9}{4}, \ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_1 < x_2 < x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

अतः अनुक्रम एक दिष्ट वर्धमान अनुक्रम है। जो कि नीचे से परिबद्ध है।

इसका निम्नक $= \frac{1}{2}$ तथा ऊपर से अपरिबद्ध अनुक्रम है। अतः यह अपसारी अनुक्रम

13. अनुक्रम $\left\{\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}\right\}$ की प्रकृति ज्ञात करो।

व्याख्या: -

$x_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots \ldots . + \frac{1}{n(n+1)}$

$= \left(\frac{2-1}{1.2}\right) + \left(\frac{3-2}{2.3}\right) + \cdots \ldots + \frac{(n+1)-n}{n(n+1)}$

$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = \frac{3}{4}, \ldots\ldots\ldots$

$\because x_1 < x_2 < x_3 <$

यह एक दिष्ट वर्धमान अनुक्रम है।

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

अनुक्रम 1 की ओर अभिसृत होता है।

श्रेणी
(Series)

- निश्चित क्रम के पदों की श्रृंखला श्रेणी कहलाती है। यदि प्रत्येक उतरोत्तर पद निश्चित नियमानुसार हो।

$$\sum u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \ldots$$

जहाँ

$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2,\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3 \ldots \ldots$

$S_n = u_t + u_2 + \cdots \ldots \ldots + u_n = \sum u_n$

यहाँ S_n श्रेणी $\sum u_n$ के प्रथम n पदों का आशिंक योग कहलाता है।

अनन्त क्षेणी-

- यदि अनुक्रम (u_n) वास्तविक संख्याओं का अनुक्रम हो तो व्यंजक $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \ldots\ldots\ldots + u_n + \cdots \ldots\ldots$
- अनन्त पदों की क्षेणी (Infinite series) कहलाती है। इसे $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ अथवा Σu से प्रदर्शित करते है।

(i) परिमित श्रेणी (Finite series):-

- यदि अनुक्रम $\langle u_n \rangle$ के निश्चित पद के पश्चात के सभी पद शुन्य हो तो व्यंजक $u_1 + u_2 + \cdots \ldots . + u_m$
- जहाँ $u_n = 0$ यदि $n > m$ परिमित श्रेणी कहलाती है।

(ii) एकान्तर श्रेणी (Alternating Series)-

- यदि श्रेणी के पद एकान्तर क्रम में धनात्मक तथा ऋणात्मक हो तो श्रेणी एकान्तर श्रेणी कहलाती है।
- श्रेणी $\Sigma(-1)^{n-1}u_n$ जहाँ $u_n > 0\ \forall n \in$ N

अनन्त श्रेणी की प्रकृति -

- एक अनन्त श्रेणी Σu_n इसके आंशिक योग की अनुक्रम $< S_n >$ के अनुसार अभिसारी, अपसारी अथवा दोलनी (परिमित या अपरिमित) हो सकती हो।

श्रेणी का अपसरण -

– कोई भी अनन्त श्रेणी अपसारी (divergent) कहलाती है यदि n के अनन्त की ओर अग्रसर (Approach) होने पर श्रेणी का योग भी अनन्त की ओर प्रवृत (tend) हो $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ अथवा $-\infty$

दोलायमान श्रेणी -

– कोई भी अनन्त श्रेणी दोलनी श्रेणी कहलाती है यदि n के अनन्त की ओर अग्रसर होने पर श्रेणी का योग किसी निश्चित सीमा की ओर अग्रसर न हो।

– यदि n के अनन्त की ओर अग्रसर होने पर श्रेणी का योग $(S_n \to \infty)$ की ओर अग्रसर होता है किन्तु चिह्न निश्चित नही हो (अर्थात् धनात्मक या ऋणात्मक) तो श्रेणी अपरिमित दोलनमयी कहलाती है।

श्रेणी का अभिसरण -

– श्रेणी $\sum u_n$ से सम्बद्ध आंशिक योगफल का अनुक्रम $\{S_n\}$ अर्थात् श्रेणी $\sum u_n$ अभिसारी श्रेणी कहलाती है यदि
$\lim_{n\to\infty}\sum u_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$ (परिमित राशी)
अर्थात् अनन्त श्रेणी का योग अभिसारी होगा यदि श्रेणी का योग एक परिमित राशी हो।
अर्थात्
n के अनन्त की ओर अग्रसर होने पर श्रेणी के n पदों का योग S_n किसी परिमित सीमा की ओर प्रवृत (tend) हो

Note: -

(i) किसी भी श्रेणी में परिमित संख्या में अतिरिक्त अवयव जोड़ने अथवा हटाने पर श्रेणी का अभिसरण अप्रभावित रहता है।

(ii) किसी भी श्रेणी के पदो को अशुन्य अचर से गुणा या भाग करने पर अभिसरण अप्रभावित रहता है।

(iii) किसी भी श्रेणी के पदो को समुहीत करके नये पद बनाने पर श्रेणी का अभिसरण अप्रभावित रहता है।

(iv) यदि $\sum u_n$ तथा $\sum v_n$ दो अभिसारी श्रेणी हो तो $\sum(u_n + v_n)$ अथवा $\sum(u_n - v_n)$ भी अभिसारी श्रेणी होती है। अर्थात् दो अभिसारी श्रेणीयों के संगत पदों का योग अथवा अन्तर से प्राप्त श्रेणी अभिसारी श्रेणी होती है।

कोशी अभिसरण सिद्धान्त-

– श्रेणी $\sum u_n$ अभिसारी श्रेणी होगी यदि और केवल यदि प्रत्येक $\epsilon > 0$ के लिए $n_0 \in N$ इस प्रकार हो ताकि
$|S_m - S_n| < \epsilon \ \forall m > n \geq n_0$

अभिसरण का आवश्यक प्रतिबन्ध -

– यदि श्रेणी $\sum u_n$ अभिसारी हो तो आवश्यक प्रतिबन्ध $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Note :-

(1) किन्तु यह प्रतिबन्ध प्रर्याप्त प्रतिबन्ध नहीं है अर्थात् यदि $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ हो तो श्रेणी का अभिसारी होना आवश्यक नहीं है।
जैसे:- $\sum u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots \ldots . + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$
के लिए $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
किन्तु $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$
अत: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ होते हुए भी श्रेणी अपसारी श्रेणी है।

(2) $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ होने पर श्रेणी आवश्यक रूप से अपसारी श्रेणी होगी।

घन पदो की श्रेणी -

– एक ऐसी श्रेणी जिसके सभी पद धनात्मक हो धन पदो की श्रेणी कहलाती है।
$u_n > 0 \quad \forall n \in N$
यदि $S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3$ …….$S_n = u_1 + u_2 + \cdots \ldots \ldots + u_n$ हो तो घनात्मक पदो वाली श्रेणी $\sum u_n$ के आंशिक योगफलों का अनुक्रम
$\{S_n\} = \{S_1,\ S_2,\ S_3, \ldots \ldots \ldots\ S_n \ldots \ldots\}$
सदैव एक दिष्ट वर्धमान अनुक्रम होता है।

Note:-

(1) धनात्मक पदो वाली श्रेणी का प्रत्येक पद निश्चित परिमित राशि से अधिक होने पर श्रेणी सदैव अपसारी श्रेणी होगी अर्थात
$u_n > k \quad \forall n \in N$ के लिए $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$

(2) प्रत्येक धन पदो की श्रेणी के अभिसारी होने पर आवश्यक तथा पर्यास्त प्रतिबन्ध है कि श्रेणी के आशिंक योगफलों का अनुक्रम $< S_n >$ परिबद्ध हों अर्थात् $S_n < k \ \forall n \in N, k > 0 \Rightarrow \Sigma u_n$ अभिसारी

घनात्मक पदो के श्रेणी के अभिसरण की जाँच प्रक्रिया -

1. अनन्त श्रेणी का n वाँ पद u_n ज्ञात करो।
2. यदि $\lim_{n\to\infty} u_n > 0$ तो श्रेणी $\sum u_n$ अपसारी होगी।
3. यदि $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ हो तो तुलना परिक्षण प्रयोग
4. यदि श्रेणी में n बढ़ती घातों के क्रम में हो तो अनुपात परिक्षण का प्रयोग
5. $\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$ होने पर (अनुपात परिक्षण विफल होने पर) राबे परिक्षण (या गाँस परिक्षण) का प्रयोग
6. राबे परिक्षण विफल होने पर डी-मार्गन एण्ड बट्रेन्ड्स परिक्षण का प्रयोग
7. यदि u_n, n की घात के रूप में हो तो n वाँ मुल परिक्षण का प्रयोग

श्रेणी का अभिसरण परिक्षण सिद्धान्त (Convergence test for a series)

तुलना परिक्षण (Comparison test)–

(a) प्रथम तुलना परिक्षण:- यदि $\sum u_n$ तथा $\sum v_n$ दो धनात्मक पदो की श्रेणियाँ हो तो

(i) यदि $\sum v_n$ अभिसारी है तथा $u_n < v_n \forall n \in N$ तो श्रेणी $\sum u_n$ भी अभिसारी श्रेणी होगी।

(ii) यदि $\sum v_n$ अपसारी है तथा $v_n \leq u_n \forall n \in N$ तो $\sum u_n$ भी अपसारी श्रेणी होगी।

(b) द्वितीय तुलना परिक्षण: - यदि $\sum u_n$ तथा $\sum v_n$ दो धनात्मक पदो की श्रेणी इस प्रकार है

ताकि $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \neq 0$

जहाँ l परिमित राशि हो तो दोनों श्रेणीयाँ अभिसारी श्रेणी होगी अथवा दोनों श्रेणीयाँ अपसारी

Note: -

– तुलना परिक्षण द्वारा किसी श्रेणी $\sum u_n$ के अभिसरण की जाँच के लिए सहायक श्रेणी $\sum v_n$ की आवश्यकता होती है । अत: सहायक श्रेणी $\sum v_n$ का चुनाव इस प्रकार किया जाता है ताकि $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$ एक अशून्य परिमित राशि प्राप्त हो।

– $\sum v_n$ गुणोत्तर श्रेणी अथवा हाइपर-हारमोनिक श्रेणी के रूप में हो सकती है।

(1) गुणोत्तर श्रेणी: - श्रेणी जिसके क्रमागत पद निश्चित अनुपातिक रूप में हो गुणोत्तर श्रेणी कहलाती है।

गुणोत्तर श्रेणी $1 + x + x^2 + \cdots .. + x^n + \cdots ..$

अभिसारी श्रेणी होगी यदि $-1 < x < 1$ तथा अपसारी श्रेणी होगी यदि $x \geq 1$ अनन्त दोलनीय है जब $x < -1$ परिमित दोलनीय है जब $x = -1$

(2) हाइपर-हारमोनिक श्रेणी

$\sum \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots .... + \frac{1}{n^p} + \cdots$

अभिसारी श्रेणी होगी यदि $p > 1$ अपसारी श्रेणी होगी यदि $p \leq 1$

कोशी का मुल परिक्षण (Cauchy's Root Test)–

– यदि $\sum u_n$ एक धनात्मक पदो की श्रेणी इस प्रकार है। ताकि

$\lim_{n\to\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = l$

(i) यदि $l < 1$ तो $\sum u_n$ अभिसारी

(ii) यदि $l > 1$ तो $\sum u_n$ अपसारी

(iii) यदि $l = 1$ तो जाँच विफल

द-लम्बर अनुपात परिक्षण (D'Alembert's Ratio Test)–

– यदि धनात्मक पदों की श्रेणी $\sum u_n$ इस प्रकार है कि

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$$

(i) यदि $l > 1$ तो $\sum u_n$ अभिसारी

(ii) यदि $l < 1$ तो $\sum u_n$ अपसारी

(iii) यदि $l = 1$ तो जाँच विफल

लघुगणकीय अनुपात परिक्षण-

– यदि $\sum u_n$ घन पदो की श्रेणी इस प्रकार है ताकि

$$\lim_{x\to\infty} n\log\left(\frac{u_n}{u_{m+1}}\right) = 1$$

(i) यदि $l > 1$ तो क्षेणी $\sum u_n$ अभिसारी

(ii) यदि $l < 1$ तो क्षेणी $\sum u_n$ अपसारी

(iii) यदि $t = 1$ तो जाँच विफल

राबे परिक्षण-

– यदि धनपदो की श्रेणी $\sum u_n$ इस प्रकार है ताकि

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = 1$$

(i) श्रेणी $\sum u_n$ अभिसारी होगी यदि $l > 1$

(ii) श्रेणी $\sum u_n$ अपसारी होगी यदि $l < 1$

(iii) $l = 1$ पर जाँच विफल

Note:- राबे परिक्षण का उपयोग तब लिया जाता है। जबकि $\lim_{n\to m} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$ हो

डी-मार्गन एवं बरट्राण्ड्स परिक्षण–

– यदि $\sum u_n$ घन पदों की श्रेणी हो तो

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right]\log\ \mathrm{n} = \mathrm{l}$$

(i) यदि $l > 1$ तो $\sum u_n$ अभिसारी श्रेणी

(ii) यदि $l < 1$ तो $\sum u_n$ अपसारी श्रेणी

Note :- यह परिक्षण तभी उपयोग में लिया जाता है। जबकि राबे परिक्षण विफल रहता है

अर्थात् $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = 1$ हो

कोशी संघन्न परिक्षण (Cauchy's Condensation test)–

– यदि $f(x), x$ के घनात्मक पूँण्णाक मानों के लिए निरन्तर ह्रासमान तथा घनात्मक हो तो $a > 1$ (घनात्मक पूराँक) के लिए $\sum f(x)$ तथा $\sum a^n f(a^n)$ दोनों श्रेणीयाँ अभिसारी श्रेणीया होगी अथवा दोनों श्रेणीय अपसारी होगी।

गॉस परिक्षण (Gauss's Test)–

– यदि $\sum u_n$ धनात्मक पदों की श्रेणी इस प्रकार है ताकि

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^p}$$

जहाँ $\alpha > 0, \mathrm{p} > 1$ तथा अनुक्रम γ_n परिबद्ध

स्थिति (I) : $\alpha \neq 1$

(i) यदि $\alpha > 1$ तो Σu_n अभिसारी

(ii) यदि $\alpha < 1$ तो $\sum u_n$ अपसारी

स्थिति (II) :- $\alpha = 1$

(i) यदि $\beta > 1$ तो Σu_n अभिसारी

(ii) यदि $\beta \leq 1$ तो Σu_n अपसारी

उदाहरण-

निम्न श्रेणियों के अभिसरण की जाँच करो।

1. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\cdots.+\frac{\sqrt{n}}{n^2-1}+\cdots.$

व्याख्या: -

$\because u_n=\frac{\sqrt{n}}{n^2-1}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$

माना सहायक श्रेणी $v_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

अत: $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1\neq 0$

अतः दो श्रेणीयाँ या तो अभिसारी होगी या अपसारी किन्तु हाइपर हारमोनिक श्रेणी परिक्षण से $p=\frac{3}{2}>1$ अत: $\sum v_n$ अभिसारी श्रेणी होगी $\sum u_n$ भी अभिसारी श्रेणी

2. $(1+1)^1+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{1}{3}\right)^3+\cdots$

व्याख्या: -

$\because \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0$

अत: श्रेणी अपसारी श्रेणी है।

3. निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच करो।

$\frac{2}{3}x+\left(\frac{3}{4}x\right)^2+\left(\frac{4}{5}x\right)^3+\left(\frac{5}{6}x\right)^4+\cdots$

व्याख्या: -

$\because u_n=\left(\frac{n+1}{n+2}x\right)^n$

$\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\cdot x\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\cdot x\right)=x$

अत: कोशी मुल परिक्षण से

यदि $x<1$ तो श्रेणी अभिसारी

यदि $x>1$ तो श्रेणी अपसारी

$x=1$ पर $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}=\frac{e}{e^2}=\frac{1}{e}\neq 0$

अत: $x=1$ पर श्रेणी अपसारी

4. $\sum u_n=\sum\frac{n^p}{(n+1)^p}$

व्याख्या: -

$\because \sum u_n=\sum\frac{n^p}{(n+1)^q}$

$\sum\frac{n^{p-q}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^q}=\sum\frac{1}{n^{n-p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q}$

माना सहायक श्रेणी

$\sum v_n=\sum\frac{1}{n^{q-p}}$

अत: $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^q}=1\neq 0$

अत: $\sum v_n$ अभिसारी श्रेणी होगी

यदि $q-p>1\Rightarrow p-q+1<0$ तथा

$\sum v_n$ अपसारी श्रेणी होगी

यदि $q-p\leq 1\Rightarrow p-q+1\geq 0$

5. श्रेणी $\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\cdots..$ के अभिसरण की जाँच करो।

व्याख्या: -

$u_n=\frac{1.35\ldots\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots.2n}$

$u_{n+1}=\frac{1.3.5\ldots\ldots\ldots(2n-1)(2n+1)}{2.4.6\ldots.2n(2n+2)}$

$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{2n+2}{2n+1},\ \frac{u_n}{u_{n+1}}-1=\frac{2n+2}{2n+1}-1$

$=\frac{1}{2n+1}$

$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$

अत: $\sum u_n$ अपसारी श्रेणी है।

6. $\sum\frac{(-1)^n\log n}{\sqrt{n}}$

व्याख्या: -

$|u_n|=f(n)=\frac{\log n}{\sqrt{n}}$

$v_n=a^nf(a^n)=a^n\frac{\log a^n}{\sqrt{a^n}}$

जहाँ $a>1$

$=na^{\frac{n}{2}}\log_e a$

$\mathrm{Lim}_{n\to\infty}\frac{v_n}{v_{n+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{na^{\frac{n}{2}}\log a}{(n+1)a^{\frac{n+1}{2}}\log a}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{a}.\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{\sqrt{a}}<1$

अत: $u_n=a^nf(a^n)$ अपसारी

कोशी संघनन परिक्षण से $f(x)=\frac{\log n}{\sqrt{n}}$ अपसारी

अत: $\frac{(-1)^n\log n}{\sqrt{n}}$ सापेक्ष अभिसारी

7. श्रेणी $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{5}+\frac{x^3}{10}+\cdots..+\frac{x^n}{n^2+1}$ के अभिसरण की जाँच करो।

व्याख्या: -

प्रथम पद छोड़ने पर शेष श्रेणी के लिए

$u_n=\frac{x^n}{n^2+1},u_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2+1}$

$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}\cdot\frac{1}{x}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$

$\because \sum u_n$ अभिसारी श्रेणी होगी यदि $\frac{1}{x}>1$ अथवा $x<1$

$\sum u_n$ अपसारी श्रेणी होगी यदि $\frac{1}{x}<1$ अथवा $x>1$ $x=1$

पर- $u_n=\frac{1}{n^2+1}=\frac{1}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$

माना सहायक श्रेणी $v_n=\frac{1}{n^2}$

अत: $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=1\neq 0$

$\because v_n$ के लिए $\mathrm{p}=2>1$ अत: $\sum v_n$ अभिसारी श्रेणी

$\Rightarrow \sum u_n$ अभिसारी श्रेणी अत: $\sum u_n$ अभिसारी होगी यदि $x\leq 1$ तथा $\sum u_n$ अपसारी होगी यदि $x>1$

एकान्तर श्रेणी
Alternating Series

– वह श्रेणी जिसके पद एकान्तरत: धन तथा ऋण चिह्न के होते है। उसे एकान्तर श्रेणी (Alternating Series) कहते है।

$u_1 - u_2 + u_3 + u_4 + \cdots \dots \dots + (-1)^{n-1}u_n + \cdots.$

$\sum (-1)^{n-1}u_n$ जहाँ $u_n > 0$ तथा $n \in \mathrm{N}$

जैसे- $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$

लेबनीज परिक्षण (Leibnitz's test)-

– एकान्तर श्रेणी $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots \dots \dots \dots$ अभिसारी श्रेणी होगी यदि श्रेणी का प्रत्येक पद संख्यॉत्मक मान में अपने पूर्वगामी पद से छोटा होता है।

अर्थात् $u_n > u_{n+1} \quad \forall n \in \mathrm{N}$ तथा $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Note :- [लेबनीज परिक्षण से श्रेणी के अभिसरण के लिए $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ होना आवश्यक है। यदि $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ हो तो श्रेणी दोलायमान (Oscillating Series) होगी]

निरपेक्ष अभिसरण -

– एकान्तर श्रेणी Σu_n, निरपेक्ष अभिसारी (Absolute Convergence) कहलाती है। यदि $\Sigma|u_n|$ अभिसारी हो

सापेक्ष अभिसरण -

– यदि Σu_n अभिसारी हो परन्तु $\Sigma|u_n|$ अभिसारी नहीं हो तो Σu_n सापेक्ष अथवा सह-प्रतिबन्ध अभिसारी कहलाती है।

Note: -

(i) यदि $\Sigma \boldsymbol{u_n}$ निरपेक्ष अभिसारी है तो $\Sigma|\boldsymbol{u}_n|$ अभिसारी होने पर Σu_n आवश्यक रूप से अभिसारी होगी किन्तु विलोम सदैव सत्य नहीं अर्थात् Σu_n अभिसारी होने पर $\Sigma|u_n|$ का अभिसारी होना आवश्यक नहीं

(ii) सापेक्ष अभिसारी श्रेणी में घनात्मक पदो को एक साथ लेकर बनने वाली श्रेणी तथा ऋणात्मक पदो को एक साथ लेकर (चिह्न बदल कर) बनने वाली श्रेणी सदैव अपसारी श्रेणी होगी अर्थात् एकान्तर श्रेणी $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots \dots \dots$ के अन्तर्गत $u_1 + u_3 + u_5 + \cdots \dots$ एक अपसारी श्रेणी तथा $u_2 + u_4 + u_6 + \cdots \dots$ एक अपसारी श्रेणी

(iii) सप्रतिबन्ध अभिसारी श्रेणी में पदो का क्रम परिवर्तित करके पुनर्व्यवस्थित करने पर श्रेणी का योग परिवर्तन जाता है।

उदाहरण: -

1. $\frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} - \frac{1}{7.8} +$

व्याख्या: -

$v_n = |u_n| = \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n},$

$v_{n+1} = |u_{n+1}| = \frac{1}{(2n+1)(2n+1)}$

$\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1 = \frac{(2n+1)(2n+1)}{2n(2n-1)} - 1 = \frac{8n+2}{2n(2n-1)}$

$\lim_{x\to\infty} n\left[\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{8+\frac{2}{n}}{2\left(2-\frac{1}{n}\right)} = 2 > 1$

अतः $\Sigma|u_n|$ अभिसारी श्रेणी , Σu_n निरपेक्ष अभिसारी

2. अनुक्रम $\left\langle 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6} \dots \dots \dots \dots \right\rangle$ है।

(a) एक दिष्ट किन्तु परिबद्ध नहीं

(b) परिबद्ध किन्तु एक दिष्ट नहीं

(c) एक दिष्ट तथा परिबद्ध

(d) न एक दिष्ट न परिबद्ध **[b]**

व्याख्या: -

∵ अनुक्रम के पद ना तो निरन्तर बढ़ते क्रम में है। ना ही घटते क्रम में अतः अनुक्रम एक दिष्ट नहीं है।

अनुक्रम का प्रत्येक पद $-1 < x_n < 1$ अतः अनुक्रम परिबद्ध है।

3. $x > 0$ के लिए श्रेणी $\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{3.4} + \frac{x^3}{5.6} + \cdots \dots$ अभिसारी होगी यदि

(a) $x > 1$

(b) $x \geq 1$

(c) $x \leq 1$

(d) $x = 1$ **[c]**

व्याख्या: -

$\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{3.4} + \frac{x^3}{5.6} + \cdots ..$

$u_n = \frac{x^n}{(2n-1)\cdot 2n}, \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}$

$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n-1)\cdot 2n} \cdot \frac{1}{x}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{2}{2n}\right)}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$

u_n अभिसारी यदि $\frac{1}{x} > 1 \Rightarrow x < 1$

u_n अपसारी यदि $\frac{1}{x} < 1 \Rightarrow x > 1$

$x = 1$ पर

$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 = \left[\frac{(2n+1)(2n+2)}{2n(2n-1)} - 1\right] = \frac{8n+3}{2n(2n-1)}$

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{8+\frac{3}{n}}{2\left(2-\frac{1}{n}\right)} = 2 > 1$

अतः $x = 1$ पर अभिसारी श्रेणी अभिसारी होगी यदि $x \leq 1$

4. श्रेणी $\frac{2}{1^p} + \frac{3}{2^p} + \frac{4}{3^p} + \cdots \dots$

(a) अभिसारी यदि $\mathrm{p} \geq 2$ और अपसारी यदि $\mathrm{p} < 2$

(b) अभिसारी यदि $p > 2$ और अपसारी यदि $p \leq 2$

(c) अभिसारी यदि $p \geq 2$ और अपसारी यदि $p > 2$

(d) अभिसारी यदि $p < 2$ और अपसारी यदि $p \geq 2$ **[b]**

व्याख्या: -

$u_n = \frac{n+1}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

माना सहायक श्रेणी $v_n = \frac{1}{n^{p-1}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$

अत: u_n अभिसारी होगी यदि v_n अभिसारी है।

v_n अभिसारी होगी यदि $p-1>1 \quad \Rightarrow p>2$ तथा अपसारी होगी यदि $p-1 \le 1 \quad \Rightarrow p \le 2$

5. **श्रेणी $x + \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{3^3x^3}{3!} + \frac{4^4x^4}{4!} +$ अभिसारी है यदि**

(a) $0 < x < \frac{1}{e}$ (b) $x > \frac{1}{e}$

(c) $\frac{2}{e} < x < \frac{3}{e}$ (d) $\frac{3}{e} < x < \frac{4}{e}$ **[a]**

व्याख्या: -

$u_n = \frac{(nx)^n}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{[(n+1)\cdot x]^{n+1}}{(n+1)!}$

$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(nx)^n}{n!} \times \frac{(n+1)!}{[(n+1)x]^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n x}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{ex}$

श्रेणी अभिसारी होगी यदि $\frac{1}{ex} > 1$ अथवा

$x < \frac{1}{e}$ तथा $x > 0$ अत: $0 < x < \frac{1}{e}$

6. **यदि अनुक्रम a_n तथा b_n दोनों l पर अभिसृत होती है। तथा यदि $a_n < c_n < b_n \ \forall n \in$ N तथा c अचर है। तो अनुक्रम c_n अभिसृत होगी।**

(a) $l + c$ पर (b) $l - c$ पर

(c) l पर (d) $\frac{1}{c}$ पर **[c]**

व्याख्या: -

(सैण्ड विच प्रमेय)

7. **श्रेणी $\left(\frac{2^2}{1^2}-\frac{2}{1}\right)^{-1} + \left(\frac{3^3}{2^3}-\frac{3}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{4^4}{3^4}-\frac{4}{3}\right)^{-3} + \ldots\ldots$**

(a) अभिसारी

(b) अपसारी

(c) परिमित दोलयमान

(d) अपरिमित दोलयमान **[a]**

व्याख्या: -

$u_n = \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - \left(\frac{n+1}{n}\right)\right]^{-n}$

$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} \cdot \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} - 1\right]^{-n}$

$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} - 1\right]^{-n}$

$\lim_{n\to\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} - 1\right]^{-1}$

$= (e-1)^{-1} = \frac{1}{(e-1)} < 1$ अत: u_n अभिसारी श्रेणी

8. **अनुक्रम $x_n = [\sqrt{(n+1)} - \sqrt{n}] \ \forall n \in$ N**

(a) अभिसारी

(b) अपरिबद्ध

(c) अभिसारी

(d) इनमें से कोई नहीं **[a]**

व्याख्या: -

$x_n = [\sqrt{(n+1)} - \sqrt{n}]$

$= [\sqrt{(n+1)} - \sqrt{n}] \times \frac{[\sqrt{(n+1)}+\sqrt{n}]}{[\sqrt{(n+1)}+\sqrt{n}]}$

$x_n = \frac{1}{\sqrt{(n+1)}+\sqrt{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$\because x_{n+1} < x_n$

अतः $\{x_n\}$ ह्रास मान, परिबद्ध अनुक्रम है जो कि 0 को अभिसृत होता है इसका निम्नक तथा उच्चक क्रमशः 0 और 1 होता है

एक समान अभिसरण (Uniform Convergence)

फलनों का अनुक्रम -

– यदि $D \subset R$ वास्तविक संख्याओं का उपसमुच्चय है तथा D से R पर परिभाषित वास्तविक मान फलन f_n है। $f_n: \mathrm{D} \to \mathrm{R} \ \forall n \in$ N

तो हमें वास्तविक फलनों का अनुक्रम $\{f_n\}$ प्राप्त होता है जिनका उभयनिष्ठ प्रान्त D हो।

उदाहरण:-

1. **(i) $f_n(x) = e^{-nx} \qquad x > 0$**

अन्तराल $(0, \infty)$ पर परिभाषित फलनों का अनुक्रम $\{e^{-x}, e^{-2x}, e^{-3x}, \ldots..\}$

(ii) $f_n(x) = x^n \qquad x \in (0,1)$

अन्तराल (0,1) पर परिभाषित फलनों का अनुक्रम $\{x, x^2, x^3, \ldots\ldots\}$

फलनों के अनुक्रम का बिन्दुशः अभिसरण :-

– यदि प्रान्त $\mathrm{D} \subset \mathrm{R}$ पर परिभाषित फलनों का अनुक्रम $\{f_n\}$ हो जहाँ $f_n: \mathrm{D} \to \mathrm{R}, \quad \forall n \in$ N तथा $\mathrm{E} \subset \mathrm{D}, x$ के मानों का समुच्चय है जिनके लिए अनुक्रम $\{f_n\}$ किसी वास्तविक फलन $f(x)$ को अभिसृत होती है।

$\mathrm{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \forall n \in$ N

अर्थात् अनुक्रम $\{f_n\}, \mathrm{E}$ पर f को बिन्दुशः अभिसृत (Pointwise converge) होती है।

– फलन $f(x)$ को अनुक्रम $\{f_n(x)\}$ का सीमा फलन (limit function) कहते है।

अर्थात प्रत्येक $\epsilon > 0$ तथा $\forall n \in$ N, $\exists n_0 \in$ N

$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall n \ge n_0$

उदाहरण:-

2. **(i) अनुक्रम $f_n(x) = e^{-nx}$ $x > 0$**

का सीमाफलन $f(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-nx} = 0$

(ii) $f_n(x) = x^n$ $\forall x \in (0,1)$

सीमा फलन $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

$= \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{यदि } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{यदि } x = 1 \end{cases}$

(iii) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{n^2x}{1+n^2x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

सीमा फलन $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

अनुक्रम का एक समान अभिसरण -

– वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चय $D \subset C$ पर परिभाषित वास्तविक मान फलनों का अनुक्रम $\{f_n(x)\}$D पर फलन $f(x)$ को एक समान अभिसृत (Uniform Converge) होता है यदि प्रत्येक $\in > 0$ के लिए $n_0 \in N$ (केवल $\in$ पर निर्भर) विधमान हो ताकि

$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \ \forall n > n_0$ तथा $x \in D$

Note-

(i) एक समान अभिसरण की स्थिति में प्रत्येक $x \in D$ के लिए n_0 निश्चित है। जबकि बिन्दुशः अभिसरण की स्थिति में n_0, x पर निर्भर करता है।

(ii) यदि अनुक्रम $\{f_n(x)\}$ एक समान अभिसारी हो तो यह बिन्दुशः अभिसारी भी होगा किन्तु विलोम सदैव सत्य नहीं अर्थात् अनुक्रम $\{f_n(x)\}$ के बिन्दुशः अभिसारी होने पर एक समान अभिसारी होना आवश्यक नहीं

(iii) यदि अनुक्रम $\{f_n(x)\}$ बिन्दुशः अभिसारी नहीं हो तो यह एक समान अभिसारी भी नहीं होगा।

उदाहरण:-

3. **(i) $f_n(x) = x^n$ $\forall x \in (0,\infty)$**

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

$= \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{यदि } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{यदि } x = 1 \\ \infty & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$

$\because f(x), x > 1$ पर अपरिभाषित अतः $\{f_n(x)\}, x > 1$ के लिए बिन्दुशः अभिसारी नही साथ ही एक समान अभिसारी भी नहीं

(ii) $f_n(x) = x^n$ $\forall x \in [0,1]$

$\because f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

$= \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{यदि } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{यदि } x = 1 \end{cases}$

$\{f_n(x)\}$ बिन्दुशः अभिसारी किन्तु एक समान अभिसारी नहीं

कोशी एक समान अभिसरण सिद्धान्त -

– किसी प्रान्त D में परिभाषित वास्तविक मान फलनों का अनुक्रम $\{f_n(x)\}$, D पर एक समान अभिसरण होता है यदि और केवल प्रत्येक $\in > 0$ के लिए एक एसे $n_0 \in N$ ($\in$ पर निर्भर) का अस्तित्व हो ताकि

$|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \ \forall x \in D$ तथा $m, n \ge n_0$ अथवा

$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon \ \forall x \in D$ तथा $p \in N, n \ge n_0$

M_n परिक्षण (M_n test):-

– प्रान्त D पर परिभाषित वास्तविक मान फलनों का अनुक्रम $\{f_n(x)\}$, फलन $f(x)$ को बिन्दुशः अभिसृत हो, अर्थात्

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in D$

तथा $M_n = \text{Sup}_n|(x) - f(x)| \ \forall x \in D$ तो अनुक्रम $\{f_n(x)\}$ एक समान अभिसृत होता है यदि और केवल यदि अनुक्रम $\{M_n\}$ शुन्य को अभिसृत हो अर्थात् $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$

उदाहरण:-

1. **$f_n(x) = x^{n-1}(1-x)$ $x \in [0,1]$**

व्याख्या: -

$\because f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

$= \lim_{n\to\infty} x^{n-1}(1-x) = 0$

माना $y = |f_n(x) - f(x)| = |x^{n-1}(1-x) - 0|$

y का मान अधिकतम होगा यदि $\frac{dy}{dx} = 0$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

$x^{n-1}(-1) + (1-x)(n-1)x^{n-2} = 0$

$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{n}$

अत: $M_n = \sup|f_n(x) - f(x)|$

$M_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = 0$

अतः अनुक्रम $f_n(x) = x^{n-1}(1-x)$ अन्तराल [0,1] में एक समान अभिसारी

2. **$f_n(x) = \frac{nx}{1-n^2x^2}$**

व्याख्या: -

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1-n^2x^2} = 0$

(माना) $y = |f_n(x) - f(x)|$

$y = \left|\frac{nx}{1-n^2x^2} - 0\right| = \frac{nx}{1-n^2x^2}$

y का मान अधिकतम होगा यदि $\frac{dy}{dx} = 0$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

$(1 - n^2x^2) \cdot n - nx(-2n^2x) = 0$

$1 + n^2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{n^2}$ (सम्भव नहीं)

अत: $\sup|f_n(x) - f(x)|$ का अस्तित्व नहीं $\{f_n(x)\}$ एक समान अभिसारी नहीं

फलनों की श्रेणी

- यदि समुच्चय $D \subset R$ पर परिभाषित वास्तविक मान फलनों की श्रेणी $\sum f_n(x)$ है।
- इस श्रेणी के n पदों का योग $S_n(x) = \sum_{r=1}^{n} f_r(x)$
- श्रेणी $\sum f_n(x)$ प्रान्त **D** पर फलन $f(x)$ को एक समान अभिसृत होती है यदि $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum f_n(x)$ अथवा फलनों की श्रेणी $\sum f_n(x)$ प्रान्त **D** पर फलन $\mathbf{S}(x)$ को एक समान अभिसृत होती है यदि प्रत्येक $\epsilon > 0$ के लिए धन पूर्णांक n_0 (ϵ पर निर्भर) विधमान हो ताकि

$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon \quad \forall n > no, \quad \forall x \in D$

जहाँ $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ आशिंक योग फलन

$S(x) = \sum f_n(x)$ सीमा फलन

उदाहरण:-

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+1)} \forall \quad x \in (0, a), a > 0$

व्याख्या: -

$f_n(x) = \frac{x}{n(n+1)}$

$S_n(x) = \sum f_n(x)$

$= f_1(x) + f_2(x) + \cdots \ldots + f_n(x)$

$= \frac{x}{1.2} + \frac{x}{2.3} + \frac{x}{3.4} + \cdots . + \frac{x}{n(n+1)}$

$= x\left[\frac{(2-1)}{1.2} + \frac{(3-2)}{2.3} + \frac{(4-3)}{3.4} + \cdots \frac{(n+1)-n}{n(n+1)}\right]$

$= x\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots . + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right]$

$= x\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{nx}{n+1}$

$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n+1} = x \ \forall x \in [0, a]$

$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$

$\Rightarrow \left|\frac{nx}{n+1} - x\right| < \epsilon \qquad \Rightarrow n > \frac{x}{\epsilon} - 1$

यदि $n_0 = \left[\frac{x}{\epsilon} - 1\right] + 1$ हो तो प्रत्येक $n > n_0$ के लिए $|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$

अतः $x \in [0, a]$ के लिए श्रेणी $\sum f_n(x)$ एक समान अभिसारी

कोशीसिद्धान्त (Cauchy's theory)-

- समुच्चय D पर परिभाषित फलनों को श्रेणी $\sum f_n(x)$ एक समान अभिसारी होगी यदि और $\epsilon > 0$ के लिए $n_0 \in N$ इस प्रकार है ताकि

$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \epsilon$

$\forall n > n_0. \quad p \in N$ तथा $x \in D$

वायस्ट्रास M परीक्षण (Weierstras M- test)-

- प्रान्त **D** पर परिभाषित फलनों की श्रेणी $\sum f_n(x)$, एक समान अभिसृत होती है, यदि अऋणात्मक पदों की अभिसारी श्रेणी $\sum M_n$ इस प्रकार विधमान हो ताकि

$|f_n(x)| < M_n, \quad \forall x \in D, \quad \forall n \in D$

- श्रेणी $\sum f_n(x)$, D में एक समान अभिसारी होगी यदि श्रेणी $\sum M_n$ अभिसारी है।

आबेल परीक्षण (Abel's test)-

- श्रेणी $\sum f_n(x) \cdot g_n(x)$ अन्तराल $[a, b]$ पर एक समान अभिसारी होगी यदि-

(i) अन्तराल $[a, b]$ में $\sum f_n(x)$ एक समान अभिसारी हो

(ii) $\{g_n(x)\}$, अन्तराल $[a, b]$ में एक समान परिबद्ध हो

(iii) प्रत्येक $x \in [a, b]$ के लिए अनुक्रम $\{g_n(x)\}$ एक दिष्ट हो

ड्रिख्ले परीक्षण (Drichlet's Test)-

- श्रेणी $\sum f_n(x) g_n(x)$ अन्तराल $[a, b]$ पर एक समान अभिसारी होती है यदि-

(i) $\{g(x)\}$ अन्तराल $[a, b]$ में शुन्य को अभिसृत होने वाला एक समान ह्रासमान अनुक्रम है।

(ii) $\{S_n(x)\}$ अन्तराल $[a, b]$ में प्रत्येक $n \in N$ के लिए एक समान परिबद्ध है।

$|S_n(x)| = \left|\sum_{r=1}^{\infty} f_r(x)\right| < k$ जहाँ k अचर

उदाहरण:-

1. $\mathbf{f_n}(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \ \mathbf{0 < x < 1}$

व्याख्या: -

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$

अतः $\sum f_n(x)$ अन्तराल [0,1] में बिन्दुशः अभिसारी

(माना) $y = |f_n(x) - f(x)|$

$= \left|\frac{nx}{1+n^2x^2} - 0\right| = \frac{nx}{1+n^2x^2}$

y अधिकतम होगा यदि $\frac{dy}{dx} = 0$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

$n(1 + n^2x^2) - 2n^2xnx = 0 \qquad \Rightarrow x = \pm\frac{1}{n}$

$\because x = \frac{1}{n}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2} =$ ऋणात्मक, $y =$ अधिकतम

$M_n = \text{Sup}|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$\lim_{n\to\infty} M_n = \frac{1}{2} \neq 0$

अतः श्रेणी $\sum \left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right)$ एक समान अभिसारी नहीं

2. **श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ $x \in \mathbf{R}$**

व्याख्या: -

माना $M_n = \frac{1}{n^2}$ श्रेणी $\sum M_n = \sum \frac{1}{n^2}$ अभिसारी श्रेणी है [$\because$ हाइपर हारमोनिक श्रेणी $\sum \frac{1}{n^p}$ अभिसारी होती है यदि $p > 1$]

$\because \sin nx \leq 1$ अतः $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$

अतः वायस्ट्रास M- परीक्षण से श्रेणी $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$ एक समान अभिसारी श्रेणी

3. $\sum \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ $0 \leq x \leq 1$

व्याख्या: -

$f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ तथा $g_n(x) = x^n$

(i) $\sum f_n(x) = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ अन्तराल [0,1] में एक समान अभिसारी

(ii) अनुक्रम $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$ अन्तराल [0,1] में एक दिष्ट वर्धमान तथा परिबद्ध अनुक्रम अतः आबेल परिक्षण से श्रेणी $\sum \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ अन्तराल [0,1] में एक समान अभिसारी श्रेणी

4. $\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2+x^2} + \frac{1}{3+x^2} \ldots$ $x \in R$

व्याख्या: -

दी गई श्रेणी $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n+x^2} = \sum f_n(x) g_n(x)$

जहाँ $f_n(x) = (-1)^{n-1}$

$\Rightarrow S_n(x) = \sum f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{यदि } n \text{ सम} \\ 1 & \text{यदि } n \text{ विषम} \end{cases}$

$|S_n(x)|$ प्रत्येक $n \in N$ तथा $\forall x \in R$ के लिए परिबद्ध तथा

$g_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$ $\forall n \in N$

$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+x^2} = 0$

अतः $\{g_n(x)\}$ एक दिष्ट ह्रासमान तथा शुन्य को अभिसृत होने वाला अनुक्रम है।

अतः ड्रिख्ले परिक्षण से $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n+x^2}$ $\forall x \in \mathbf{R}$ के लिए एक समान अभिसारी श्रेणी है।

5. $\sum_{n=1}^{\Sigma} \left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$

व्याख्या: -

$S_n(x) = \sum f_n(x)$

$= \left(\frac{x}{1+x^2} - 0\right) + \left(\frac{2x}{1+2^2x^2} - \frac{x}{1+x^2}\right) + \left(\frac{3x}{1+3^2x^2} - \frac{2x}{1+2^2x^2}\right) + \cdots \ldots + \left(\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$

$\mathbf{S}(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$

$M_n = \operatorname{Sup} S_n(x) - S(x)| = \operatorname{Sup}\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right|$

माना $y = \frac{nx}{1+n^2x^2}$

y अधिकतम होगा यदि $\frac{dy}{dx} = 0$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

$(1+n^2x^2) \cdot n - nx(2n^2x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{n}$

$M_n = (y)_{\max} = \frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}}$

$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \lim_{n\to\infty} M_n = \frac{1}{2} \neq 0$

$\because x \to 0$ पर $n \to \infty$

$\because x$ $x = 0$ एक समान अभिसारी होने का बिन्दु है।

अभ्यास प्रश्न

1. **अनुक्रम $\{x_n\} = \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\} \forall n \in N$ है।**

(a) अपसारी

(b) दौलनी

(c) अपरिबद्ध अनुक्रम

(d) अभिसारी **[d]**

व्याख्या:-

$\because x_n = [\sqrt{(n+1)} - \sqrt{n}] \times \left[\frac{\sqrt{(n+1)}+\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)}+\sqrt{n}}\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{(n+1)}+\sqrt{n}}$

$= \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)}+\sqrt{n}} = 0$

अतः अनुक्रम $\{x_n\}$ अभिसारी अनुक्रम

2. **If $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, then the series Σa_n is:**

(a) Oscillatory

(b) Divergent

(c) Convergent

(d) इनमें से कोई नहीं **[d]**

व्याख्या:-

यदि $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ हो तो Σa_n का अभिसारी होना आवश्यक नहीं

3. **अनुक्रम $\left\langle \log \frac{1}{n} \right\rangle$ है**

(a) Convergent

(b) Divergent to ∞

(c) Divergent to $-\infty$

(d) None of the above **[c]**

व्याख्या:-

$\because \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \log \frac{1}{n}$

$= \lim_{n\to\infty} (-\log n) = -\infty$

Sequence divergent to $-\infty$

4. अनुक्रम $\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\ldots+\frac{1}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ की सीमा है

(a) $-\frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{2}$

(c) 1

(d) 0 **[b]**

व्याख्या:-

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots.+\frac{1}{3^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

5. The series $\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{3.4}+\frac{x^3}{5.6}+\cdots\ldots..,\mathbf{x}>0$ is

(a) Convergent, if $x<1$

(b) Conve gent if $x>1$

(c) divergent, if $x>1$

(d) divevgent, if $x=1$ **[a]**

व्याख्या:-

$$\Sigma u_n = \sum\frac{x^n}{(2n-1)(2n)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{(2n-1)(2n)}\cdot\frac{(2n+1)(2n+2)}{x^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{2}{2n}\right)}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

श्रेणी अभिसारी होगी यदि $\frac{1}{x}>1 \quad \Rightarrow x<1$

श्रेणी अपसारी होगी यदि $\frac{1}{x}<1 \Rightarrow x>1$

$x=1$ पर $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{2n(2n-1)}-1\right) = 2>1$$

अतः $x=1$ पर अपसारी श्रेणी Σu_n अभिसारी होगी यदि $x<1$ तथा अपसारी होगी यदि $x\geq 1$

6. निम्न में से सही कथन है?

(a) $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ कोशी अनुक्रम है परन्तु $\{(-1)^n\}$ कोशी अनुक्रम नहीं है

(b) $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ कोशी अनुक्रम नहीं है परन्तु $\{(-1)^n\}$ कोशी अनुक्रम है

(c) दोनों अनुक्रम $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ एवं $\{(-1)^n\}$ कोशी अनुक्रम है

(d) दोनों $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ तथा $\{(-1)^n\}$ कोशी अनुक्रम नहीं है **[a]**

व्याख्या:-

$$|x_{n+p}-x_n| = \left|\frac{1}{n+p+1}-\frac{1}{n+1}\right|$$

$$= \left|\frac{p}{(n+p+1)(n+1)}\right|$$

$\because |x_{n+p}-n_n| <\in \qquad \forall n = n_0, \quad p\in N$

अतः अनुक्रम $<x_n>$ कोशी अनुक्रम है, जो कि 0 को अभिसूत होता है।

$\langle x_n\rangle = \langle(-1)^n\rangle$

$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^n = \begin{bmatrix}1 \text{ यदि } n \text{ सम}\\ -1 \text{ यदि } n \text{ विषम}\end{bmatrix}$

अतः $<y_n>$ दोलनी अनुक्रम $<y_n>$ कोशी अनुक्रम नही होगा

7. निम्न में से कौन-सा गलत कथन है?

(a) प्रत्येक कोशी अनुक्रम अभिसारी होता है

(b) प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम कोशी अनुक्रम होता है

(c) प्रत्येक परिबद्ध अनुक्रम कोशी अनुक्रम होता है

(d) इनमें से कोई नहीं **[c]**

व्याख्या:-

परिबद्ध अनुक्रम परिमित दोलनी अनुक्रम भी संभव है।

8. निम्न में से कौन-सा अनुक्रम अभिसारी नहीं है?

(a) $\{1+(-1)^n\}$

(b) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$

(c) $\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$

(d) सभी अभिसारी अनुक्रम है **[a]**

व्याख्या:-

(i) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} 1+(-1)^n$

$= \begin{cases}0 & \text{यदि } n \text{ विषम}\\ 2 & \text{यदि } n \text{ सम}\end{cases}$ (u_n) दोलनी अनुक्रम

(ii) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$

अनुक्रम $\frac{n}{n+1}$, 1 को अमिसृत होता है।

(iii) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right] = 1$

अनुक्रम $\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$, 1 को अभिसृत्त होता है।

9. अनुक्रम $\left\{\frac{2n+7}{3n+2}\right\}$ निम्न में से किस मान को अभिसूत करता है?

(a) $\frac{3}{2}$

(b) $-\frac{7}{2}$

(c) $\frac{2}{3}$

(d) $-\frac{2}{7}$ **[c]**

व्याख्या:-

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+7}{3n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{7}{n}}{3+\frac{2}{n}}\right) = \frac{2}{3}$$

10. श्रेणी $(1-x)+(x-x^2)+(x^2-x^3)$ ……… अभिसारी होगी यदि।

(a) $-1 < x \le 1$

(b) $-1 \le x < 1$

(c) $-1 \le x \le 1$

(d) $x < -1$ **[a]**

व्याख्या:-

श्रेणी का योग

$S_n = (1-x)+(x-x^2)+(x^2-x^3)+\cdots+(x^{n-1}-x^n) = 1-x^n$

$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$ (परिमित) यदि $|x| \le 1$ श्रेणी अभिसारी श्रेणी होगी यदि $\Rightarrow -1 \le x \le 1$

11. p के किस मान के लिए श्रेणी $1+\frac{2^p}{2!}+\frac{3^p}{3!}+\frac{4^p}{4!}+\cdots$.. अभिसारी श्रेणी होगी?

(a) केवल $p=2$

(b) केवल $p=3$

(c) केवल $p=1/3$

(d) p के सभी मानों के लिए **[d]**

व्याख्या:-

$u_n = \frac{n^p}{n!}, u_{n+1} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)!}$

$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^p}{n} \times \frac{\lfloor(n+1)}{(n+1)^p} = \frac{n^p}{(n+1)^{p-1}}$

$= \frac{n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p-1}}, \quad p \ge 2$

12. p के किस मान के लिए श्रेणी $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ एक अपसारी है?

(a) $p=2$

(b) $p=3$

(c) $p=1/2$

(d) p के किसी भी मान के लिए नहीं **[c]**

व्याख्या:-

$f(n) = \frac{1}{n(\log \mathbf{n})^p}$

$m^n f(m^n) = \frac{m^n}{m^n(\log m m^p} = \frac{1}{n^p(\log m)^p}$

$\because \frac{1}{(\log m)^p}$ उभयनिष्ठ अचर तथा $\sum \frac{1}{n^p}$ अभिसारी यदि $p > 1$

$\sum \frac{1}{n^p}$ अपसारी यदि $p \le 1$

13. निम्न में से कौन-सी अपसारी श्रेणी है?

(a) $\sum \frac{1}{n^2}$ (b) $\sum \frac{1}{n^3}$

(c) $\sum \frac{1}{n}$ (d) $\sum \frac{1}{n^4}$ **[c]**

व्याख्या:-

हाइपर हारमोनिक श्रेणी $\sum \frac{1}{n^p}$

(i) अभिसारी श्रेणी होगी यदि $p > 1$

(ii) अपसारी श्रेणी होगी यदि $p \le 1$

श्रेणी $\sum \frac{1}{n^2}$ के लिए $p = 2 > 1$ (अभिसारी)

श्रेणी $\sum \frac{1}{n^3}$ के लिए $p = 3 > 1$ (अभिसारी)

श्रेणी $\sum \frac{1}{n}$ के लिए $p = 1$ (अपसारी)

श्रेणी $\sum \frac{1}{n^4}$ के लिए $p = 4$ (अभिसारी)

14. निम्न में से कौन-सी श्रेणी अभिसारी होगी?

(a) $\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots$….

(b) $\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}$

(c) $\log 2+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}$…..

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ **[a]**

व्याख्या:-

(i) $\sum u_n = \frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots$ … ….

$u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

माना सहायक श्रेणी $v_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} = 1 \ne 0$$

$\therefore\ p = 2 > 1$

अत: श्रेणी Σv_n अभिसारी

तुलना परिक्षण से श्रेणी Σu_n अभिसारी

(ii)

$\Sigma u_n = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1} \Rightarrow u_n = (-1)^{n-1}$

$$\lim_{x\to\infty} u_n = \begin{cases} -1 \text{ यदि सम संख्या} \\ +1 \text{ यदि } n \text{ विषम संख्या} \end{cases}$$

अत: Σu_n परिमित दोलनी श्रेणी

(iii) $\Sigma u_n = \Sigma\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$u_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}$… …

माना सहायक श्रेणी $v_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = 1 \ne 0$

$\because p = 1$ अत Σv_n अपसारी श्रेणी

तुलना परिक्षण से Σu_n अपसारी श्रेणी

(iv) $\Sigma u_n = \Sigma\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \ne 0$

अत: Σu_n अपसारी श्रेणी

15. श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ अपसारी होगी यदि-

(a) $x \ge 1$ (b) $x \ge 2$

(c) $x \ge 3$ (d) $x \ge 4$ **[d]**

व्याख्या:-

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

$\Rightarrow u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{(n+1)!^2}{(2n+2)!} x^{n+1}$

$\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{x}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{4}{x}$

अपसारी श्रेणी की स्थिति में $\frac{4}{x} \le 1 \Rightarrow 4 \le x$

16. अनुक्रम $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6} \ldots\ldots\ldots\right)$

(a) एक दिष्ट किन्तु परिबद्ध नहीं

(b) परिबद्ध किन्तु एक दिष्ट नहीं

(c) एक दिष्ट तथा परिबद्ध

(d) न एक दिष्ट न परिबद्ध **[b]**

व्याख्या:-

∵ अनुक्रम के पद ना तो निरन्तर बढ़ते क्रम में है। ना ही घटते क्रम में अतः अनुक्रम एक दिष्ट नहीं है।

अनुक्रम का प्रत्येक पद $-1 < x_n < 1$ अतः अनुक्रम परिबद्ध

17. वह श्रेणी, जिसका n वाँ पद e^{-n^2x} है. है?

(a) अभिसारी यदि $x > 0$, अपसारी यदि $x \le 0$

(b) अभिसारी यदि $x \ge 0$, अपसारी यदि $x < 0$

(c) अभिसारी यदि $x < 0$, अपसारी यदि $x \ge 0$

(d) अभिसारी यदि $x \le 0$, अपसारी यदि $x > 0$ **[a]**

व्याख्या:-

$\sum u_n = \sum e^{-n^2x}$

Case I : यदि $x < 0$ हो तो

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} e^{-n^2x} = \infty \ne 0$

अतः $x < 0$ पर $\sum u_n$ अपसारी

Case II : यदि $x = 0$ हो तो

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} e^{-n^2 \cdot 0} = 1 \ne 0$

अतः $x = 0$ पर $\sum u_n$ अपसारी

Case III यदि $x > 0$ हो तो माना सहायक श्रेणी $v_n = \frac{1}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n^2x}}{\frac{1}{n^2}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^{n^2x}} = 0 \ne 1$

∵ $p = 2 > 1$ अत: $\sum v_n$ अभिसारी तुलना परिक्षण से $\sum u_n$ अभिसारी

18. अनुक्रम $\{x_n\}$ जहाँ $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ है?

(a) अभिसारी (b) अपसारी

(c) दोलनी (d) कोशी **[a]**

व्याख्या:-

$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n}$

$x_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{n+1+n+1}$

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$

$= \frac{(2n+1)+(2n+2)-2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)}$

$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$

$x_{n+1} - x_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$

अतः $\langle x_n >$ एक वर्धमान अनुक्रम है?

पुन: $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n}$

$x_n < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$

$\Rightarrow x_n < \frac{n}{n} \quad \Rightarrow x_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

अर्थात् $< x_n >$ एक परिबद्ध अनुक्रम है।

∵$< x_n >$ एक दिष्ट वर्धमान परिबद्ध अनुक्रम है अत: $< x_n >$ अभिसारी अनुक्रम है।

19. श्रेणी $2 - \frac{3}{2^2} + \frac{4}{3^2} - \frac{5}{4^2} + \cdots\ldots\ldots$ है-

(a) पूर्ण अभिसारी

(b) सशर्त अभिसारी

(c) अपसारी

(d) दोलायमान **[b]**

व्याख्या:-

∵ एकान्तर श्रेणी के लेबनीज परिक्षण से यदि $u_n > u_{n+1}$ हो तो $\sum u_n$ अभिसारी पूनः $\sum |u_n|$ अभिसारी नहीं अतः $\sum u_n$ सशर्त अभिसारी।

20. श्रेणी $x + \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{3^3x^3}{3!} + \frac{4^4x^4}{4!} + \cdots$ अभिसारी है यदि:

(a) $0 < x < \frac{1}{e}$

(b) $x > \frac{1}{e}$

(c) $\frac{2}{e} < x < \frac{3}{e}$

(d) $\frac{3}{e} < x < \frac{4}{e}$ **[a]**

व्याख्या:-

$u_n = \frac{(nx)^n}{n!}, u_{n+1} = \frac{[(n+1)x]^{n+1}}{(n+1)!}$

$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(nx)^n}{n!} \times \frac{(n+1)!}{[(n+1)x]^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n x}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{1}{x} = \frac{1}{ex}$

श्रेणी अभिसारी होगी यदि $\frac{1}{ex} > 1$ अथवा $x < \frac{1}{e}$ तथा $x > 0$ अत: $0 < x < \frac{1}{e}$

21. अनुक्रम $x_n = \left[\sqrt{(n+1)} - \sqrt{n}\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(a) अपसारी

(b) अपरिबद्ध

(c) अभिसारी

(d) इनमें से कोई नहीं **[c]**

व्याख्या:-

$x_n = [\sqrt{(n+1)} - \sqrt{n}]$

$= \left[\sqrt{(n+1)} - \sqrt{n}\right] \times \frac{\left[\sqrt{(n+1)}+\sqrt{n}\right]}{\left[\sqrt{(n+1)}+\sqrt{n}\right]}$

$x_n = \frac{1}{\sqrt{(n+1)}+\sqrt{n}}$

$\because x_{n+1} < x_n$

अत: x_n ह्रास मान अनुक्रम तथा $\lim_{n\to 0} x_n = 0$

अत: x_n परिबद्ध अनुक्रम, x_n अभिसारी अनुक्रम

22. $x > 0$ के लिए श्रेणी $\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{3.4} + \frac{x^3}{5.6} + \cdots$ ..... अभिसारी होगी यदि

(a) $x > 1$ (b) $x \geq 1$

(c) $x \leq 1$ (d) $x = 1$ **[c]**

व्याख्या:-

$\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{3.4} + \frac{x^3}{5.6} + \cdots \ldots \ldots$

$u_n = \frac{x^n}{(2n-1)\cdot 2n}$

$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}$

$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n-1)\cdot 2n} \cdot \frac{1}{x}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{2}{2n}\right)}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$

u_n अभिसारी यदि $\frac{1}{x} > 1 \quad \Rightarrow x < 1$

u_n अपसारी यदि $\frac{1}{x} < 1 \quad \Rightarrow x > 1,\ x = 1$ पर

$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 = \left[\frac{(2n+1)(2n+2)}{2n(2n-1)} - 1\right] = \frac{8n+3}{2n(2n-1)}$

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{8+\frac{3}{n}}{2\left(2-\frac{1}{n}\right)} = 2 > 1$

अत: $x = 1$ पर अभिसारी श्रेणी अभिसारी होगी यदि $x \leq 1$

23. श्रेणी $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, (1-x)^{-1}$ को जिस अंतराल में अभिसरित होती है, वह है?

(a) केवल $0 < x \leq 1$

(b) केवल $-1 \leq x < 0$

(c) केवल $-1 < x < 1$

(d) केवल $-1 \leq x \leq 1$ **[c]**

व्याख्या:-

$-1 < x < 1$

24. The series $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots$ converges in:

(a) $2 < x < \infty$

(b) $|x| > 1$

(c) $-1 < x \leq 1$

(d) $x < -1$ **[c]**

व्याख्या:-

$\Sigma u_n = \sum (-1)^n \frac{x^n}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{nx}{n+1}\right| = |x|$

$|x| < 1$ पर Σu_n अभिसारी श्रेणी

$x = 1$ पर $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

$\Rightarrow x = 1$ पर Σu_n अभिसारी श्रेणी Σu_n अभिसारी श्रेणी होगी यदि - $1 < x \leq 1$

25. श्रेणी $\frac{2}{1^p} + \frac{3}{2^p} + \frac{4}{3^p} + \cdots \ldots$,

(a) अभिसारी यदि $p \geq 2$ और अपसारी यदि $p < 2$

(b) अभिसारी यदि $p > 2$ और अपसारी यदि $p \leq 2$

(c) अभिसारी यदि $p \geq 2$ और अपसारी यदि $p > 2$

(d) अभिसारी यदि $p < 2$ और अपसारी यदि $p \geq 2$ **[b]**

व्याख्या:-

$u_n = \frac{n+1}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}}\left(1 + \frac{1}{n}\right),$

माना सहायक श्रेणी $v_n = \frac{1}{n^{p-1}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

अत: u_n अभिसारी होगी यदि v_n अभिसारी है।

v_n अभिसारी होगी यदि $p - 1 > 1 \Rightarrow p > 2$ तथा अपसारी होगी यदि $p - 1 \leq 1 \Rightarrow p \leq 2$

26. श्रेणी $\sum \frac{\sin nx}{n^p}$ सभी वास्तविक संख्याओं के लिए एक समान अभिसारी है यदि RPSC II grade9.12.2011

(a) p < 1

(b) p ≤ 1

(c) p > 1

(d) $p \geq 1$ **[c]**

व्याख्या:-

$\because |\sin nx| \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$

अत: $\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right| \leq \frac{1}{n^p}$ तथा अनुक्रम $\left(\frac{1}{n^p}\right), p > 1$ के लिए (हाईपरहारमोनिक श्रेणी) के लिए अभिसारी अनुक्रम है। अत: $\sum \frac{\sin nx}{n^p}$; $p > 1$ के लिए एक समान अभिसारी अनुक्रम

27. यदि अनुक्रम a_n तथा b_n दोनों l पर अभिसृत होती है तथा यदि $a_n < c_n < b_n, \forall n$ एवं c एक अचर है, तो अनुक्रम c_n अभिसृत होगी: RPSC II Grade 2013

(a) $l + c$ पर

(b) $l - c$ पर

(c) l पर

(d) $\frac{l}{c}$ पर **[c]**

28. श्रेणी $\left(\frac{2^2}{1^2} - \frac{2}{1}\right)^{-1} + \left(\frac{3^3}{2^3} - \frac{3}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{4^4}{3^4} - \frac{4}{3}\right)^{-3} + \cdots..$ है: RPSC II Grade 2013

(a) अभिसारी

(b) अपसारी

(c) परिमित दोलायमान

(d) अपरिमित दोलायमान **[a]**

व्याख्या:-

$u_n = \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} - \frac{n+1}{n}\right)^{-n}$

$u_n^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1\right]^{-1}$

n वें मूल परिक्षण से

$\text{Lim}_{n\to\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1\right]^{-1}$

$= i \cdot (e-1)^{-1} = \frac{1}{e-1} < 1$

अत: $\sum u_n$ अभिसारी श्रेणी

29. अनुक्रम $\{f_n(x)\} = nx(1-x)^n$ अन्तराल $0 \le x \le 1$ में एक समान अभिसारी किस बिन्दु पर नहीं है? RPSC II gred 9.12.2011

(a) $x = 1$

(b) $x = \frac{1}{2}$

(c) $x = 0$

(d) $x = \frac{3}{4}$ **[c]**

व्याख्या:-

$f_n(x) = nx(1-x)^n$

$\because x = \frac{1}{n}$ के लिए

$\text{Lim}_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \neq 0$

अत: $f_n(x)$ एक समान अभिसारी नही है यदि

$x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

30. वह अन्तराल जिसमें फलनों की श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ एकसमान अभिसृत होती है, हैं? RPSC II Grade 2013

(a) $[-1,1]$ (b) $[0,1]$

(c) $[-2,0]$ (d) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ **[d]**

व्याख्या:-

माना $u_n = x^n; v_n = \frac{1}{n+1}$

$|\sum_{n=1}^{\infty} u_n| = |x + x^2 + x^3 + \cdots \ldots \ldots \ldots.|$

$= \frac{x}{1-x}$ (परिमित) यदि $|x| < \delta < 1$ साथ ही $< v_n >$ धनात्मक पदों का एक दिष्ट ह्यासमान अनुक्रम है जो कि शून्य को एक समान अभिसूत होता है अतः द्विचर परिक्षण से दी गई श्रेणी $\sum u_n v_n = \sum \frac{x^n}{n+1}$ एक समान अभिसारी होगी

यदि $|x| < \delta$ अथवा $-\delta < x < \delta$

31. यदि अनुक्रम $\{a_n\}$ तथा $\{b_n\}$ क्रमशः परिमित सीमाओं a तथा b को अभिसृत होती है, तब $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n a_1}{n}$ बराबर है? RPSC I grade-22.7.16

(a) $a + b$

(b) $a - b$

(c) ab

(d) $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ **[c]**

व्याख्या:-

$\because \lim_{n\to\infty} a_n = a$ तथा $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

माना $a_n = a + x_n$

अत: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

$\sum x_n = 0$

$b_n = b + y_n$

अत: $\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

$\sum y_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots .. + a_n b_1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(a+x_1)(b+y_n) + (a+x_2)(b+y_{n-1}) + \cdots + (a+x_n)(b+y_1)}{n}$

$\text{Lim}_{n\to\infty} ab + a\left(\frac{1}{n}\sum y_n\right) + b\left(\frac{1}{n}\sum x_n\right) + \frac{1}{n}(\sum x_n y_n)$

$= ab + a.0 + b.0 + 0 = ab$

32. अनुक्रम $\{x_n\}$ जहाँ $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{2x_n + 3}{4} \quad \forall n \in$ N, है? RPSC I grade-22.7.16

(a) अभिसारी (b) अपसारी

(c) सशर्त अभिसारी (d) इनमें से कोई नहीं **[a]**

व्याख्या:-

अनुक्रम $\left\{1, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{23}{16}, \frac{47}{32}, \ldots \ldots \ldots\right\}$

$\lim_{n\to\infty} x_n = a(\text{ माना }) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2x_n + 3}{4}\right)$

$a = \frac{2a+3}{4} \quad \Rightarrow 4a = 2a + 3 \quad \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

अनुक्रम $\{x_n\}, \frac{3}{2}$ को अभिसृत होता है।

33. श्रेणी $\frac{1}{1.2}+\frac{2}{3.4}+\frac{3}{5.6}+\cdots\ldots\ldots$ है। RPSC II grade 2016

(a) अपसारी (b) अभिसारी

(c) सशर्त अभिसारी (d) दोलनीय **[a]**

व्याख्या:-

$\frac{1}{1.2}+\frac{2}{3.4}+\frac{3}{5.6}+\cdots$

$u_n=\frac{n}{(2n-1)\cdot 2n}=\frac{1}{2(2n-1)}$

माना $v_n=\frac{1}{n}$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{1}{4}\neq 0$

$\because$ p = 1 अत: $\sum v_n$ अपसारी होगी

तुलना परिक्षण से $\sum u_n$ भी अपसारी होगी

34. अनुक्रम $\{S_n\}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ है। RPSC II grade 2016

(a) एक परिमेय मान पर अभिसृत

(b) एक अपरिमेय मान पर अभिसृत

(c) एक परिमेय मान पर निपेक्ष अभिसृत

(d) अपसारी **[b]**

व्याख्या:-

$S_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\because \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ (परिमित)

अत: अनुक्रम अपरिमेय मान e को अभिसृत होता है।

35. निम्न श्रेणी के लिए सत्य कथन है: $\frac{14}{1^3}+\frac{24}{2^3}+\frac{34}{3^3}+\cdots$..

RPSC II Grade 18.2.19

(a) दोलनीय अभिसारी है

(b) अभिसारी है

(c) अपसारी है

(d) इनमें से कोई नहीं **[b]**

व्याख्या:-

श्रेणी $=\sum u_n=\sum\frac{10n+4}{n^3}$,

माना $\sum v_n=\sum\frac{1}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n}+10\right)=10\neq 0$

$\because \sum v_n$ अभिसारी ($\because$ p > 1)

अत: $\sum u_n$ अभिसारी

36. श्रेणी $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n}\right)$ के लिए सत्य कथन है?

RPSC II Grade 18.2.19

(a) अभिसारी यदि $x<3$

(b) अभिसारी यदि $x>3$

(c) अपसारी यदि $x>1$

(d) अपसारी यदि $x>0$ **[a]**

व्याख्या:-

$\sum u_n=\sum\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n}\times\frac{(n+1)\cdot 3^{n+1}}{x^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{x}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{x}$

श्रेणी $\sum u_n$ अभिसारी श्रेणी होगी यदि $\frac{3}{x}>1$ अथवा $x<3$

37. The series $\left[\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots.\right]$:

(a) converges for $p>0$

(b) converges for $p<0$

(c) diverges for $p>0$

(d) diverges for $p<0$ **[a]**

व्याख्या:-

Case I :- जब $p>0$

श्रेणी $\sum u_n=\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ अभिसारी श्रेणी है।

$\because \sum|u_n|=\sum\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right|=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\ldots\ldots$

$\Sigma|u_n|, p>1$ के लिए अभिसारी

अत: $\Sigma u_n, p>1$ के लिए निरपेक्ष अभिसारी तथा $0<p\leq 1$ के लिए सप्रतिबन्ध अभिसारी

Case II: - जब $p=0$ $\Sigma u_n=1-1+-1+$ परिमित दोलनी श्रेणी

Case III : - जब $p<0$ हो तो श्रेणी ($-\infty$ से $+\infty$ के मध्य) अपरिमित रूप से दोलनी श्रेणी

38. निम्न श्रेणियों में से कौन-सी अभिसारी है?

RPSC-II Grade-2015

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\log_e n$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log_e n}{n}$ **[c]**

39. यदि $a_n=\sin\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{1}{n}$; $n\in$ N तो $\lim_{n\to\infty} a_n$ है- RPSC-II Grade-2015

(a) 1

(b) -1

(c) 0

(d) ∞ **[b]**

व्याख्या:-

$a_n=\sin\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$; $n\in$ N

$\left[1-1,0+\frac{1}{2},-1-\frac{1}{3},0+\frac{1}{4},\ldots\ldots\ldots\right]$

$\left[0,\frac{1}{2},-\frac{4}{3},\frac{1}{4}\ldots\ldots\ldots\right]$

40. यदि $\{a_n\},\{b_n\}$ और $\{c_n\}$ तीन अनुक्रम है जिससे $a_n < b_n < c_n$ और $\lim a_n = \lim c_n = k$ तो $\lim b_n$ है: RPSC-II Grade-2015

(a) $< k$ (b) $> k$

(c) $= k$ (d) इनमें से कोई नहीं **[c]**

व्याख्या:-

सैण्डविच प्रमेय से $a_n \le b_n \le c_n$ हो तो

$\lim_{n\to\infty} b_n = k$ जहाँ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = k$

41. वास्तविक संख्या निकाय मे विवृत्त समुच्चयों के अनन्त संग्रह का सर्वनिष्ठ है: RPSC II Grade 2013

(a) निश्चित रूप से एक विवृत्त समुच्चय

(b) सदैव एक संवृत्त समुच्चय

(c) विवृत्त समुच्चय होना आवश्यक नहीं

(d) एक अनन्त समुच्चय **[c]**

व्याख्या:-

उच्चक $= \frac{3}{2}$, निम्नक $= 0$

$\Rightarrow S = \left[0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \dots \dots.\right]$

42. समुच्चय $\left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$ है। RPSC II grade 2016

(a) संवृत एवं परिबद्ध

(b) विवृत्त लेकिन परिबद्ध

(c) न तो संवृत न ही विवृत लेकिन परिबद्ध

(d) अपरिबद्ध **[d]**

व्याख्या:-

$\because \mathrm{A} = \left\{\frac{1}{\mathrm{n}} : \mathrm{n} \in \mathrm{N}\right\} = \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \dots \dots..\right]$

$\because 0 < \frac{1}{\mathrm{n}} \le 1$

अतः समुच्चय बायी ओर से विवृत तथा दायी ओर से संवृत सम्पूर्ण $x \in \mathrm{N}$ के लिए ना संवृत ना विवृत तथा 0 से 1 के मध्य परिबद्ध

43. पूर्ण क्रमित क्षेत्र के रूप में वास्तविक संख्याओं के गुणधर्म में सम्मिलित है? RPSC II grade 20.12.10

(a) क्षेत्र अभिगृहीत

(b) क्रम अभिगृहीत

(c) पूर्णता क्रम अभिगृहीत

(d) उपरोक्त सभी **[d]**

44. समुच्चय $S = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in N\right\}$ के उच्चक एवं निम्नक का मान है- RPSC II grade 9.12.2011

(a) $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ (b) $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

(c) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ (d) $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ **[a]**

व्याख्या:-

$\mathrm{S} = \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} : \quad n \in N\right]$

45. यदि p और q वास्तविक धनात्मक संख्याएँ हैं, तो श्रेणी $\frac{2^p}{1^q} + \frac{3^p}{2^q} + \frac{4^p}{3^q}$ अभिसारी होगी यदि।

RPSC I grade-22.7.16

(a) $p < q - 1$ (b) $p < q + 1$

(c) $p \ge q - 1$ (d) $p \ge q + 1$ **[a]**

व्याख्या:-

$\sum u_n = \sum \frac{(n+1)^p}{n^q} = \sum \frac{1}{n^{q-p}} \left[1 + \frac{1}{n}\right]^p$

माना $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^{q-p}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

अतः u_n अभिसारी होगी यदि $q - p > 1 \Rightarrow q - 1 > p$

46. समुच्चय $\mathbf{S} = \{x : 0 \le x \le 1, x \in \mathbf{Q}\}$ के लिए सत्य कथन

(a) समुच्चय S में अनन्त अवयव हैं अत: अपरिबद्ध है।

(b) S के उच्चक का अस्तित्व नहीं है।

(c) S का निम्नक शून्य है।

(d) उच्चक एवं निम्नक S के अवयव नहीं है। **[c]**

व्याख्या:-

S एक परिबद्ध समुच्चय है जिसका निम्नक $= 0 \in$ S

उच्चक $= 1 \in$ S

47. यदि अनुक्रम $\{a_n\}$ एक परिमित सीमा a को अभिसारी होती है और अनुक्रम $\{b_n\}, b$ को अभिसारी होती है, तो $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} \dots\dots + a_n b_1}{n}$ है-

RPSC-II Grade-2015

(a) ab (b) $\frac{ab}{n}$

(c) $a^n b^n$ (d) $(ab)^{\frac{1}{n}}$ **[a]**

व्याख्या:-

कोशी की सीमा वाली प्रथम प्रमेय के प्रयोग से $a_n = a + x_n$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$b_n = b + y_n$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots \dots + a_n b_1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(a+x_1)(b+y_n) + (a+x_2)(b+y_{n-1}) + \dots \dots}{n}$

$\mathrm{Lim}_{n\to\infty} \left(ab + \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots}{n} + a\left(\frac{y_1 + y_2 + \dots}{n}\right) + b\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots}{n}\right)\right)$

$= ab + 0 + a \cdot 0 + b \cdot 0 = ab$

48. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \dots$ है-

RPSC-II Grade-2015

(a) अभिसारी

(b) अपसारी

(c) दोलनीय

(d) एकसमान अभिसारी **[a]**

लेखक परिचय

गणित के दिग्गज डॉ. नरेश मेनारिया वर्तमान में पेसिफिक विश्वविद्यालय, उदयपुर में प्रोफेसर एवं विभागाध्यक्ष के रूप में कार्यरत हैं। गणित की 6 पुस्तकों के लेखक डॉ. मेनारिया PHD., M.Sc., MBA, B.Ed. डिग्री धारक है। विगत 18 वर्षों से गणित शिक्षण को समर्पित डॉ. मेनारिया बी.एससी., एम.एससी. एवं प्रतियोगी परीक्षाओं का शिक्षण करवा रहे हैं। डॉ. मेनारिया के वैधिक एवं भारतीय स्तर पर कई प्रतिष्ठित शोध जर्नल में 20 से अधिक शोध पत्र प्रकाशित हो चुके हैं तथा वे चीन एवं जापान में भी अपने शोध को प्रस्तुत कर चुके हैं। गतिशील, ऊर्जावान एवं उत्साही शिक्षक के रूप में वे जटिल गणितीय अवधारणाओं को सरलता से समझाने में अद्वितीय हैं।

अनिल सर गणित एवं रिजनिंग विषय के एक प्रतिष्ठित विशेषज्ञ हैं। उनका जन्म राजस्थान के सीकर जिले के दांतारामगढ़ क्षेत्र में हुआ। वे अपनी सरल, स्पष्ट तथा प्रभावी शिक्षण शैली के कारण विद्यार्थियों के बीच अत्यंत लोकप्रिय हैं। प्रतियोगी परीक्षाओं के क्षेत्र में उन्हें कई वर्षों का समृद्ध अनुभव प्राप्त है।

उनके कुशल मार्गदर्शन में अनेक विद्यार्थियों ने शिक्षक भर्ती(I,II,III), पुलिस कांस्टेबल, पुलिस उपनिरीक्षक, पटवार, ग्राम विकास अधिकारी इत्यादि राजस्थान की विभिन्न भर्ती परीक्षाओं में उल्लेखनीय सफलता हासिल की है। शिक्षण के साथ-साथ लेखन क्षेत्र में भी उनका महत्वपूर्ण योगदान रहा है। उन्होंने प्रतियोगी परीक्षाओं की तैयारी हेतु कई उपयोगी पुस्तकों एवं अध्ययन सामग्री का निर्माण किया है, जो विद्यार्थियों के लिए अत्यंत सहायक सिद्ध हो रही हैं।