

L2D Method
Series
Factors
Smallest Greatest

L2D Method

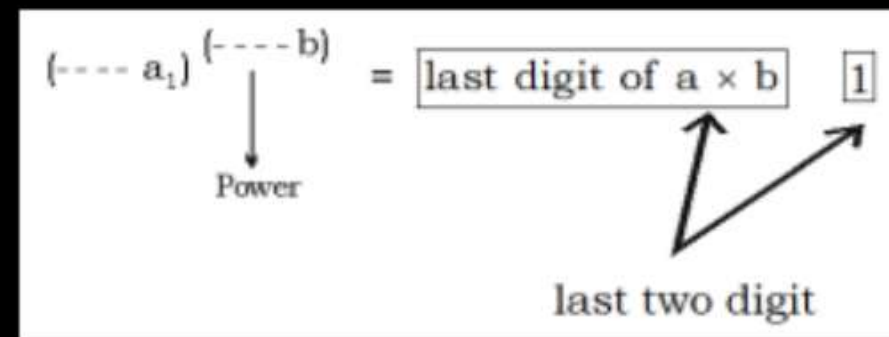
(अंतिम दो अंक विधि)

Last 2 Digits Method

किसी संख्या (Number) को 100 से भाग देने पर प्राप्त शेषफल Last Two Digit (L2D) कहलाता है।

[I] Rules of Finding Last Two Digit (अंतिम दो अंक ज्ञात करने के नियम):

(1) Ending in 1 (जो 1 से समाप्त हो रहा है)



$$(2345781)^{123456} =$$

$$8 \times 6 = 48$$

$$\frac{8}{1} \checkmark \text{ last two digit}$$

(2) Even Number (सम संख्या):

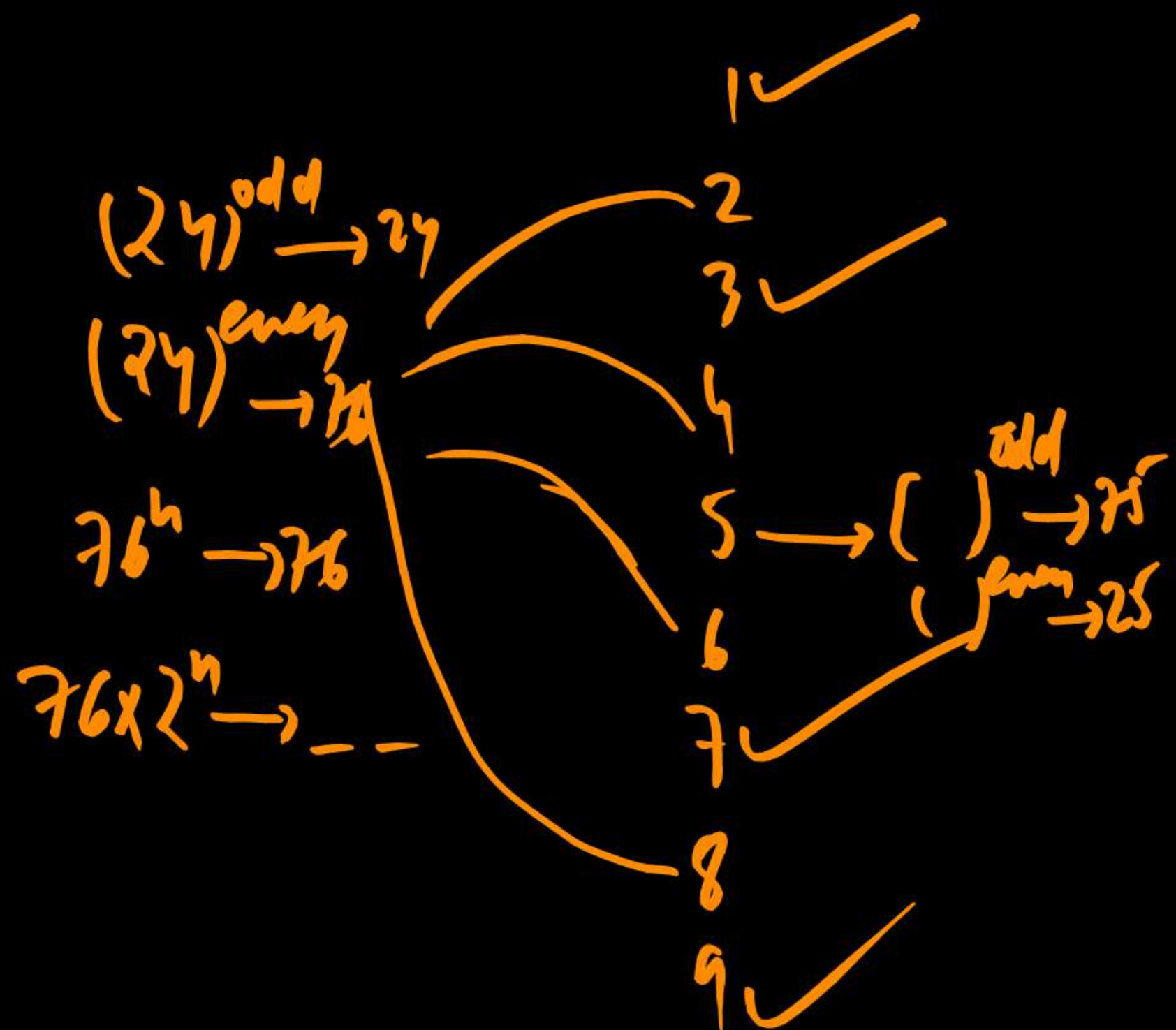
$$(24)^{\text{odd}} = 24$$

$$(76)^N = 76 \text{ last two digit}$$

$$(24)^{\text{even}} = 76$$

$$(24)^{\text{even}} = 76$$

$$76^N = 76$$

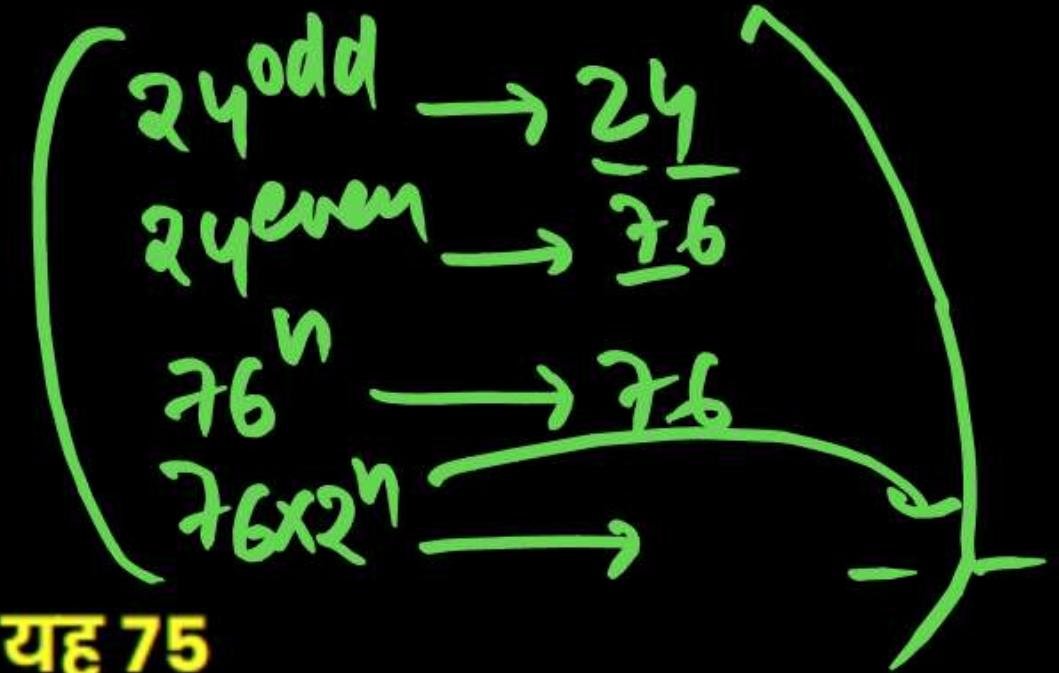


$76 \times 2^n = \text{last two digit of } 2^n$ ✓✓

$$2^{20} = 1048576$$

(3) Ending in 5:-

यदि अंतिम से पहला अंक (Second Last) विषम (Odd) है, तो यह 75 में end होगा और घात (Power) सम (Even) है, तो 25 पर मदक होगा।



- (... 76⁶⁵ → 75
- 1995²⁰¹⁴ → 25
- 65⁷⁵ → 25
- 1995²⁰¹⁵ → 75 ✓
- 3573 → 75

(23475) ⁶⁵ → Power odd = 75

() ^{even} = 25

(4) Odd Number (विषम संख्या) 3, 7, 9:-

Last Digit 1 बनाने में convert करें।

(5) $x^2, (50-x)^2, (50+x)^2, (100-x)^2, (100+x)^2$

सभी के last two digit समान होते हैं:

Ex: $x = 26$

$$x^2 = 26^2 = 676$$

$$(100 - x)^2 = (74)^2 = 5476$$

$$(100 + x)^2 = (126)^2 = 15876$$

$$(50 - x)^2 = (24)^2 = 476$$

$$(50 + x)^2 = 762 = 5776$$

Ex.1: $(491)^{83}$ last two digit = ?

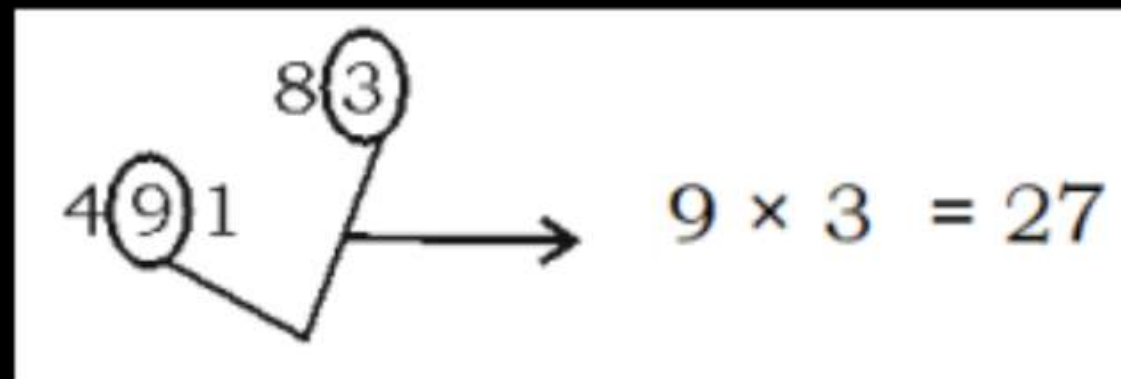
Soln: हमें last two digit निकालने हैं

Step (1) सबसे पहले Unit Digit निकाल कर लिख लेंगे।

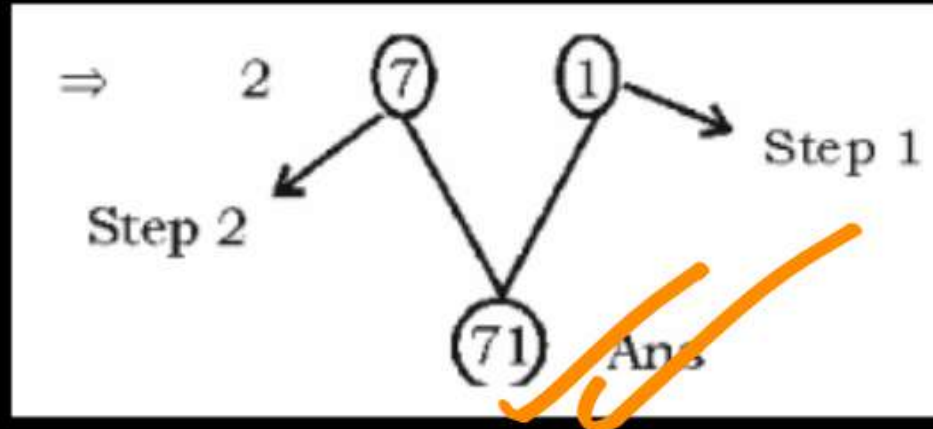
1 की Power का Unit Digit = 1 है

Step (2) अब Number का दहाई अंक (Tens Place) को Power के इकाई अंक (Unit Digit) के साथ multiply करेंगे।

$$(491)^{83} \rightarrow 71$$


$$4(9)1 \xrightarrow{8(3)} 9 \times 3 = 27$$

(3) Step 2 में multiplication के बाद जो last two digits आए हैं उसका आखिरी अंक (Last Digit) Step 1 में प्राप्त हुए अंक के आगे लिख देंगे और Number के last two digit निकल जाएंगे।



Ex.2: $(86789)^{41}$, Last two digit = ?

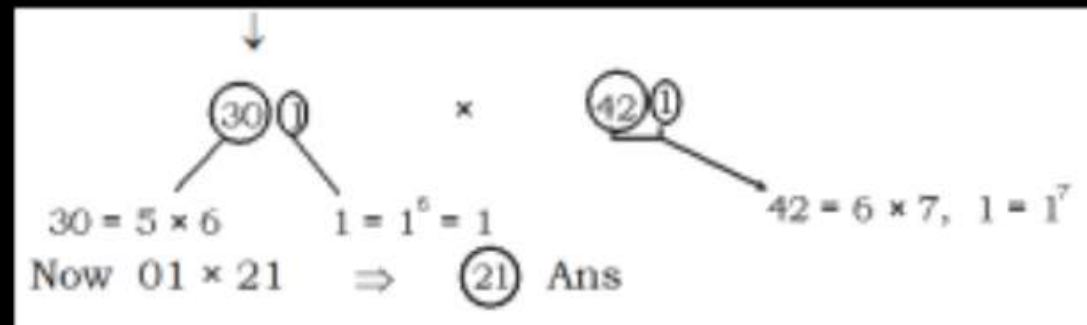
Soln: Last two digit = $(89)^{41} = 89 \times (89)^{40}$

$$\begin{aligned}
 (86789)^{41} &\rightarrow (89)^{41} \rightarrow 89 \times (89)^{40} \\
 &\quad 89 \times (89^2)^{20} \\
 &\quad 89 \times (21)^{20} \\
 &\quad 89 \times 01 \rightarrow 89 \text{ Ans}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 89 \times (89^2)^{20} \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad (-1)^{20} \\
 &= 89 \times 01 \\
 &\quad \textcircled{89} \text{ Ans} \\
 &89 \times (21)^{20} \\
 &= 89 \times 01 \\
 &\quad \textcircled{89} \text{ Ans} \\
 &21 = (100 - x)^2 = (100 - 89)^2 = 1 \textcircled{21} = 21 \text{ Ans}
 \end{aligned}$$

Ex.3: $51^{456} \times 61^{657}$, Last two digit = ?

Soln: $51^{456} \times 61^{657}$



$$51^{456} \times 61^{657}$$

$$01 \times 21 \rightarrow 21$$

Ex.4: 2^{105} , Last two digits = ?

Soln: $(220)^5 \times 2^5$

$$(\dots 76)^5 \times 2^5$$

$$\Rightarrow 76 \times 25 = \boxed{32} \text{ Ans}$$

$$2^5 \times 2^{100}$$

$$2^5 \times (2^{20})^5$$

$$2^5 \times (\dots 76)^5$$

$$(2^5) \times 76 \rightarrow 32 \text{ Ans}$$

$$2^{10} \times 2^{10}$$
$$\downarrow$$
$$1024 \times 1024$$

Ex.5: $499 \times 695 \times 705$, Last two digits = ?

Soln: $\frac{499 \times 695 \times 705}{100}$

$\begin{matrix} \checkmark & \checkmark & \checkmark \\ \boxed{-1} & \boxed{-5} & \boxed{+5} \end{matrix}$

[$\because$ 100 से भाग देने पर $-1, -5, +5$ शेषफल आयेगा]

$-1 \times -5 \times 5 = 25 R$ or

Last two digit = $\boxed{25}$ Ans

Ex.6: $653 \times 227 \times 96 \times 973 \times 98$, Last two digits = ?

Soln: $\frac{653 \times 227 \times \cancel{96} \times 973 \times 98}{\cancel{100}}$
25

$\div 4$

[यहाँ 4 से $\div$ इसलिए किया because 25 सभी को आसानी से $\div$ कर देगी]

$$\frac{653 \times 227 \times 24 \times 973 \times 98}{25}$$

$$\Rightarrow 3 \times 2 \times -1 \times -2 \times -2$$

$$\Rightarrow -24 - 24 + 25 = \boxed{01}$$

$$01 \times 4 = 04$$

$01 \times 4^* =$ Ans $[4^* = \text{क्योंकि } 4 \text{ से } \div \text{ किया था इसलिए } 4 \text{ से गुणा करना होगा}]$

[II] L2D Method से Exam Calculation पर प्रहार:-

1. जब हासिल (Carry) न हो:

Ex.: 7798513671 × 343732913, Last two digits = ?

Soln: Step 1: Last two digits निकालने के लिए हमें Number के सिर्फ last two digit लेने हैं।

Step 2: Unit Digit तो आखिरी अंकों की गुणा करके सभी निकाल लेते है लेकिन Last two digits निकालने में परेशानी आती है।

Step 3: सबसे पहले Last Digit की आपस में गुणा करेंगे और अंतिम अंक लिखेंगे।

Handwritten calculation: 71×13 with the result 23 circled.

$$1 \times 3 = 3$$

Step 4: Unit Digit निकालने के बाद निम्नलिखित Steps follow करेंगे।

$$\text{----- } 71 \times \text{..... } 13$$

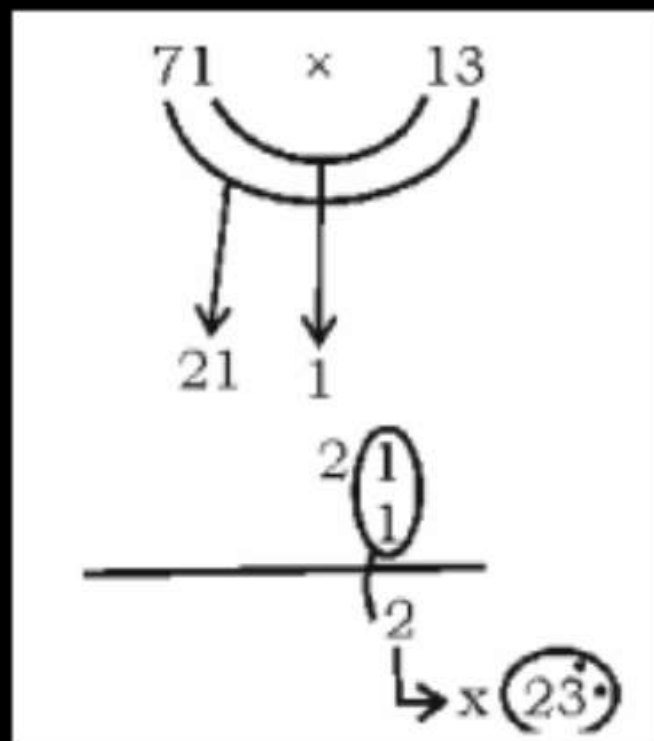
Step 5: पास-पास वाले No की और दूर-दूर वाले Number की आपस में multiply करते हैं।



The diagram shows the numbers 71 and 13 with a multiplication sign (x) between them. Two curved lines (arcs) are drawn below the numbers. The first arc connects the digit 7 to the digit 1, and the second arc connects the digit 1 to the digit 3. This illustrates the 'Step 5' instruction to multiply adjacent and distant digits.

Step 6: पास-पास वालों की गुणा करके जो Number आए उसे लिख लो फिर दूर-दूर वालों की गुणा करके जो Number आए उसे पहली में जोड़ दो, यदि कोई हासिल (Carry) आए तो हमें उससे कोई मतलब नहीं सिर्फ पिछला Number लेना है।

➤ इस प्रकार, last two digits निकाल पाएंगे।



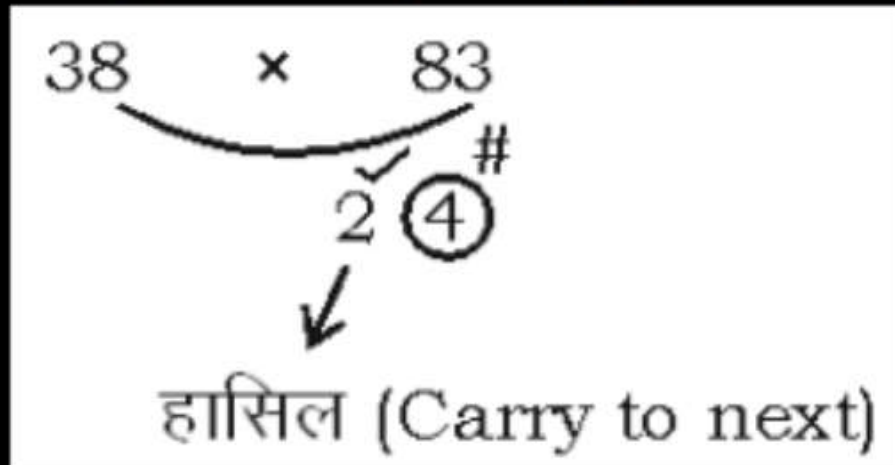
2. जब हासिल (Carry) हो:

Ex.1: 292383473438 × 613694252383 Last two digit = ?

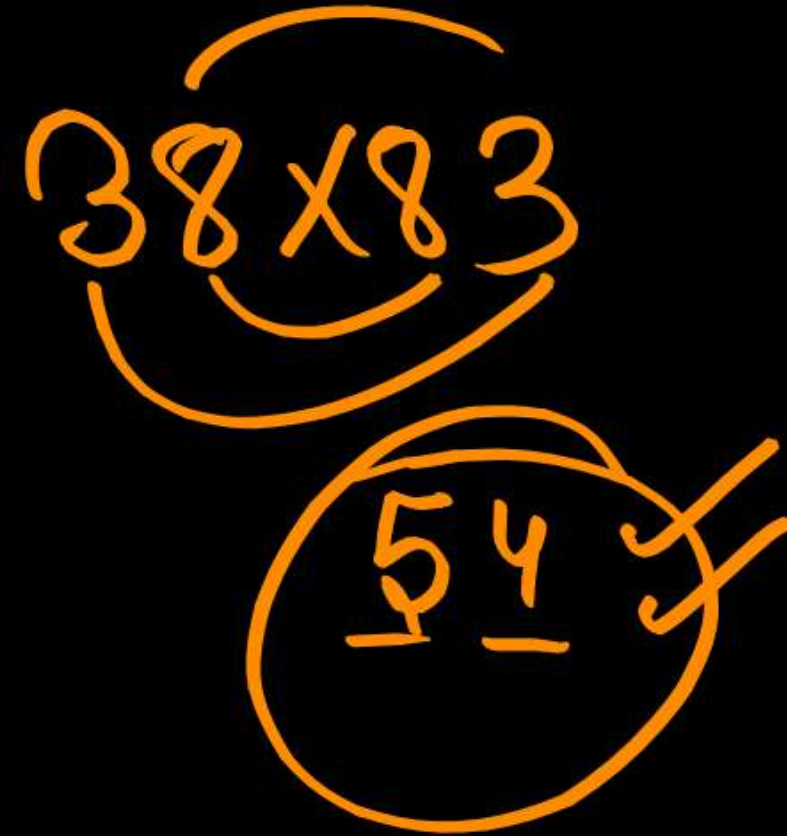
Soln: चूँकि हमें last two digits निकालने हैं इसलिए सिर्फ last two digits (अंतिम दो अंक) लेंगे और multiply करेंगे।

----- 38 × ----- 83

- सबसे पहले last digits की आपस में गुणा (multiply) करेंगे अंतिम अंक (last digit) लिख लेंगे। यदि multiply करके Number दो अंकों का आए तो last digit लिख लेंगे और second last digit मिल (carry) में ले लेंगे।


$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 83 \\ \hline \end{array}$$

हासिल (Carry to next)


$$38 \times 83 = 3154$$

➤ अब last two digit के लिए पास-पास और दूर-दूर वाले Number की आपस में गुणा करेंगे और हासिल (carry) को Add कर देंगे।

38 × 83

64
+2 ✓ हासिल (Carry)

66

9

7 5*

सिर्फ 5 ही लेंगे क्योंकि हमें last two digit निकालने हैं।

Last two digits = $5^* \times 4^* = 54$ Ans

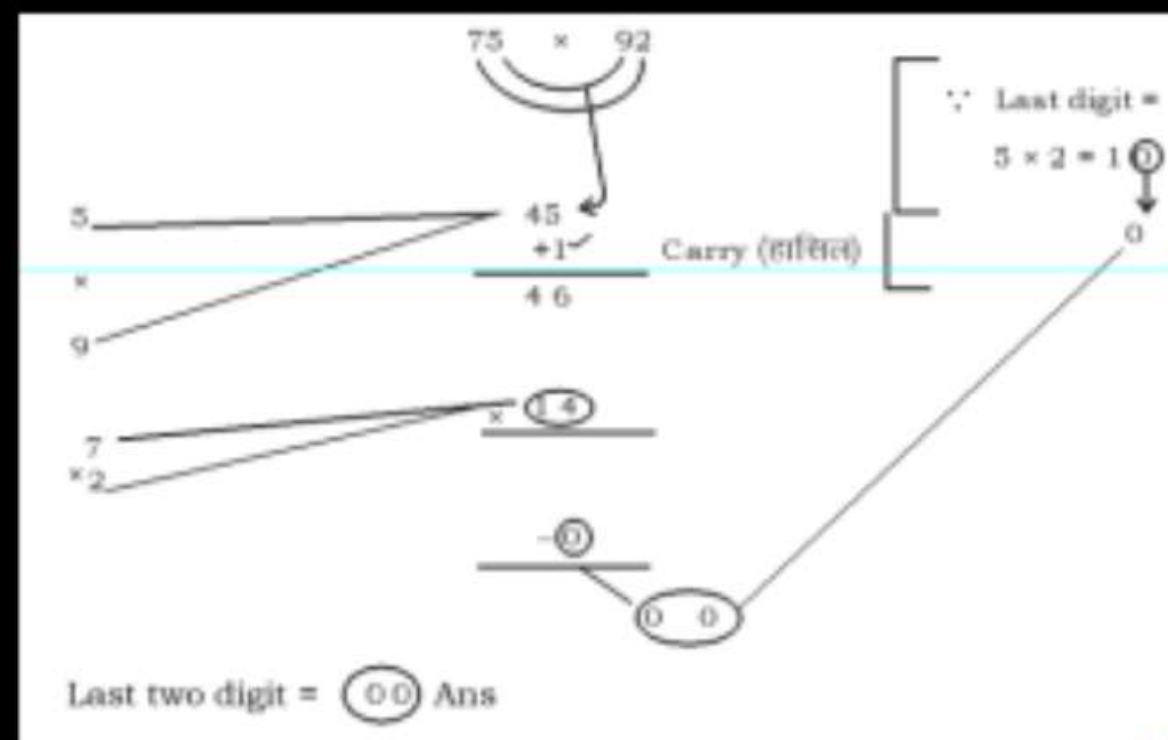
Ten's Digit

Unit digit

54 Ans

Ex.2: 9257642775 × 6795347192 Last two digit = ?

Soln: ---75 × --- 92



$$\begin{array}{r} 75 \times 92 \\ \hline 00 \end{array}$$

Last two digit = 00 Ans

Series (શ્રેણી)

- Common Series

$$\frac{1}{\boxed{1} \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{9 \times \boxed{10}} = ?$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

- Common Series

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{143} = ?$$

$$\left(\frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{11 \times 13} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{13} \right) = \frac{5}{39}$$

- Trending Series

जब नीचे हर (Denominator) में तीन Number हों:

$$\frac{1}{\text{I} \text{ II III}} = \frac{1}{\text{b}} \left[\frac{1}{\text{I} \text{ II}} - \frac{1}{\text{II III}} \right]$$

Diagram illustrating the partial fraction decomposition of a fraction with three terms in the denominator. The first term is labeled I, II, III. The second term is labeled I, II. The third term is labeled II, III. The variable 'b' is circled in orange. Arrows point from the circled 'b' to the circled 'I' and 'II' in the first term of the brackets, and from the circled 'II' and 'III' in the second term of the brackets.

III और I का अंतर (Difference)

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{100 \times 101 \times 102} = ? = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{101 \times 102} \right)$$

Diagram illustrating the sum of a series of fractions. The first term is circled in orange. The last term is circled in orange. The result is shown as a fraction with a denominator of 2 and a numerator of (1/(1x2) - 1/(101x102)).

- Root वाली Series

1. $\frac{1}{1*\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}} = ?$

$$\sqrt{100} - \sqrt{1}$$
$$10 - 1 = 9$$

- $\pm$ की Alternate Series

1. $\frac{1}{\sqrt{9}-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{4}} = ?$

$\sqrt{9} + \sqrt{4}$
5 Ans

Factors (गुणनखंड)

- Factors निकालने का Fast Method

108

$$\sqrt{108} \approx 10.4 -$$

1	2	3	4	6	9
108	54	36	27	18	12

12 factors

- **Factors निकालने का Fast Method**

120

$$\sqrt{120} \approx 11$$

1	2	3	4	5	6	8	10
120	60	40	30	24	20	15	12

16 factors

- **Special Properties of Factors**

$$N = a^p \times b^q \times c^r$$

$$N = 216 \\ = 2^3 \times 3^3$$

$$N_f = (3+1)(3+1) = 16$$

$$\text{Number of Factor, } N_f = (p + 1) (q + 1) (r + 1)$$

No. of odd factors (विषम गुणनखंड की संख्या) (O_f)

= (Power of odd no.+1) $\times$ (Power of odd no.+1) $\times$

$$T_g = 16$$

$$216 = 2^3 \times 3^3$$

$$O_f = (3+1) = 4$$

No. of Even factors (सम गुणनखंड की संख्या) $(E_f) = N_f - O_f$

= (Power of odd+1) $\times$ (Even power same)

$$216 = 2^3 \times 3^3$$

$$E_f = (3+1) \times 3 \\ = 12$$

Sum of factors (गुणनखंड का योग) (S_f)

$$= \frac{a^{p+1} - 1}{a - 1} \times \frac{b^{q+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{r+1} - 1}{c - 1}$$

$$216 = 2^3 \times 3^3$$

$$S_f = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \times \frac{3^4 - 1}{3 - 1}$$

Average of factors (गुणनखंड का औसत) $(A_f) = \frac{S_f}{N_f} = \frac{54}{16}$

Product of factors (गुणनखंड का गुणनफल) $(P_f) = (\text{Number})^{\frac{N_f}{2}}$

$$216 = 2^3 \times 3^3$$

$$P_f = (216)^{\frac{16}{2}} \\ = (216)^8$$

216

N_f
 O_f
 E_f
 S_f
 $A_f = \frac{S_f}{N_f}$
 P_f

360

Smallest & Largest (सबसे छोटा और सबसे बड़ा)

- $abcd^e$, abc^{de} , a^{bcde} , $abcde$ का Special Concept

Which is smallest ?

(a) 9876^5

(b) 987^{65}

(c) 9^{8765}

(d) 98765

①

a, b, c, d, e
संख्या

Power बढ़ती $\rightarrow$ No. $\downarrow$

- $abcd^e$, abc^{de} , a^{bcde} , $abcde$ का Special Concept

Which is largest ?

(a) 3333^3

(b) 333^{33}

(c) 33^{333}

✓ (d) 3^{3333}

①

- $abcd^e$, abc^{de} , a^{bcde} , $abcde$ का Special Concept

Which is smallest ?

(a) 234^{567}

(b) 2345^{67}

(c) 23^{4567}

(d) 2^{34567}

B